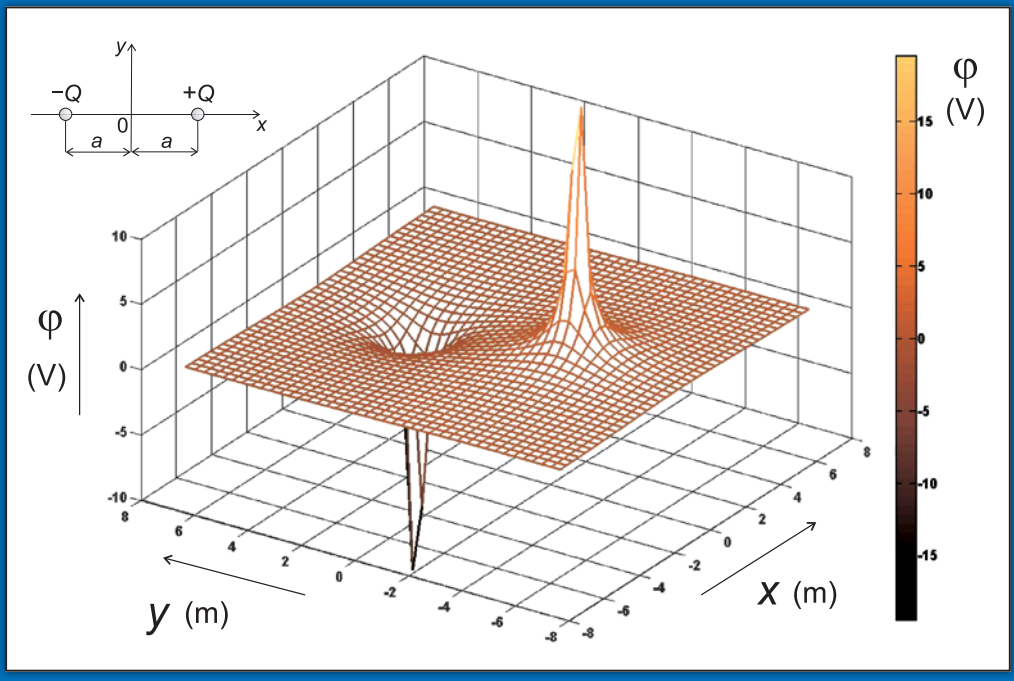
Daniel Mayer

APLIKOVANÝ ELEKTROMAGNETIZMUS



Kopp

Aplikovaný elektromagnetizmus

Úvod do makroskopické teorie elektromagnetického pole pro elektrotechnické inženýry

Daniel Mayer

nakladatelství
České Budějovice, 2026

Aplikovaný elektromagnetizmus

© Prof. Ing. Daniel Mayer, DrSc., 2012–2026

Recenzent: Prof. Ing. Klára Čápová, CSc.

První vydání knižní verze 2012

První vydání elektronické verze 2026

Vydalo nakladatelství KOPP,

Šumavská 3, 370 01 České Budějovice,

tel.: 386 460 474, 773 780 628

e-mail: knihy@kopp.cz;

Internet: www.kopp.cz

ISBN 978-80-7232-436-1 (print)
ISBN 978-80-7232-658-7 (pdf)

Všechna práva vyhrazena.

Žádná část této knihy nesmí být reprodukována, skladována ve vyhledávacím systému nebo předávána v jakékoli formě nebo jakýmkoli prostředkem elektronickým, mechanickým, fotokopírováním, nahráváním nebo jinak bez předchozího svolení vydavatele.

Nasledující text vznikl za přispění editora, grafika, sazeče, korektora a mnoha dalších. Všichni vám společně s autorem děkujeme za zakoupení této knihy.

Pokud jste se k textu dostali bez zaplacení a kniha se vám líbila, podpořte prosím vznik publikace zakoupením jedné kopie na **www.kopp.cz**

Obsah

PŘEDMLUVA **11**

ÚVOD **13**
0.1. Jak teoreticky řešíme elektrotechnické projekty 13
0.2. Dvojí význam pojmu „pole“ 16
0.3. Elektromagnetické pole a technické projekty 20

1. Základní pojmy a zákony teorie elektromagnetického pole **23**
1.1. Vznik a vývoj teorie elektromagnetického pole 23
1.2. Základní pojmy a problémy teorie elektromagnetického pole 25
1.3. Význam teorie elektromagnetického pole pro provádění inženýrských projektů 25
1.4. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky 25
1.5. Materiálové charakteristiky 30
1.6. Maxwellovy rovnice 32
1.6.1. Soustava Maxwellových rovnic v integrálním tvaru 32
1.6.2. Soustava Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru 36
1.6.3. Rovnice pro proudovou hustotu 38
1.6.4. Podmínky na rozhraní 39
1.7. Klasifikace elektromagnetického pole 44
1.8. Příklady 46

2. Základní vlastnosti časově neproměnného elektrického a magnetického pole **49**
2.1. Elektrostatické pole 49
2.1.1. Rovnice elektrostatického pole 49
2.1.2. Vodič v elektrostatickém poli, elektrostatická indukce 55
2.1.3. Dielektrikum v elektrickém poli, polarizace dielektrika 58
2.1.4. Matematický popis elektrické polarizace, vektor elektrické polarizace 60
2.2. Stacionární proudové pole 63
2.2.1. Rovnice stacionárního proudového pole 64
2.2.2. Zákony elektrických obvodů 70
2.3. Stacionární magnetické pole 74
2.3.1. Rovnice magnetického pole 74
2.3.2. Definice a vlastnosti skalárního magnetického potenciálu 76
2.3.3. Definice a vlastnosti vektorového magnetického potenciálu 78
2.4. Makroskopické vlastnosti magnetik 82
2.5. Magnetická polarizace 90
2.5.1. Mikrostruktura procesu magnetické polarizace 90
2.5.2. Matematický popis magnetizace, vektor magnetické polarizace 92
2.6. Závěrečná poznámka 95
2.7. Příklady 96

3. Přímá aplikace Maxwellových rovnic v integrálním tvaru 99
3.1. Přímé řešení Maxwellových rovnic v integrálním tvaru 99
3.1.1. Elektrostatické pole 100
3.1.2. Stacionární proudové pole 107
3.1.3. Stacionární magnetické pole 108
3.2. Řešení složitějších konfigurací s použitím principu superpozice 111
3.3. Příklady 116

4. Okrajové úlohy pro rovnice potenciálů stacionárních elektrických a magnetických polí 123
4.1. Obecná formulace okrajové úlohy pro elektrostatiku 124
4.2. Dva příklady na řešení jednoduchých okrajových úloh z elektrostatiky 127
4.3. Okrajová úloha pro stacionární proudové pole 129
4.4. Okrajová úloha pro stacionární magnetické pole 131
4.5. Sestavení matematického modelu 134
4.5.1. Dva příklady 134
4.5.2. Vymezení definiční oblasti v symetrických a v periodických topologických strukturách 135
4.6. Shrnutí 139
4.7. Příklady 139

5. Řešení stacionárních elektrických a magnetických polí pomocí integrálních výrazů 147
5.1. Elektrostatické pole 147
5.1.1. Prostorové elektrostatické pole 147
5.1.2. Rovinné elektrostatické pole 149
5.2. Stacionární magnetické pole. Zákon Biotův-Savartův 153
5.3. Metoda zrcadlení 159
5.3.1. Elektrostatické pole 159
5.3.2. Stacionární proudové pole 166
5.3.3. Stacionární magnetické pole 167
5.4. Příklady 168

6. Numerické řešení okrajových úloh 179
6.1. Metoda konečných diferencí – MKD 179
6.1.1. Algoritmus MKD 179
6.1.2. Sestavení diskrétního modelu okrajové úlohy 181
6.2. Metoda konečných prvků – MKP 187
6.3. Řešení elektromagnetických polí moderními softwarovými produkty 194
6.3.1. Struktura současného profesionálního SW 194
6.3.2. Současný profesionální SW 195
6.3.3. Ukázky použití profesionálního programu 197
6.4. Příklady 203

7. Výpočet kapacit, indukčností a odporů 205
7.1. Výpočet kapacit 205
7.1.1. Definice kapacity kondenzátoru 205
7.1.2. Výpočet kapacity kondenzátoru pomocí Gaussovy věty (třetí MR) 207
7.1.3. Výpočet kapacity kondenzátoru řešením okrajové úlohy 211
7.2. Výpočet vlastní a vzájemné indukčnosti 214
7.2.1. Dvě definice vlastní indukčnosti 214
7.2.2. Definice vzájemné indukčnosti 219
7.2.3. Výpočet vlastní a vzájemné indukčnosti tenkých smyček 221
7.2.4. Neumannův vzorec pro výpočet vzájemné indukčnosti 227
7.3. Výpočet odporů 230
7.4. Kondenzátory s větším počtem elektrod 232
7.5. Příklady 236

8. Magnetické obvody 245
8.1. Zákony magnetických obvodů 246
8.1.1. Hopkinsonův zákon 247
8.1.2. První Kirchhoffův zákon pro magnetické obvody 248
8.1.3. Druhý Kirchhoffův zákon pro magnetické obvody 249
8.2. Analogie mezi elektrickými a magnetickými obvody 250
8.3. Metody řešení magnetických obvodů buzených proudem 251
8.3.1. Jednoduchý (nerozvětvený) magnetický obvod 251
8.3.2. Složitý magnetický obvod 259
8.4. Indukčnost cívek magnetických obvodů 260
8.5. Magnetické obvody s permanentními magnety 261
8.5.1. Jednoduchý magnetický obvod s hysterézí 262
8.5.2. Magnetické obvody s permanentními magnety generujícími silná magnetická pole 265
8.6. Materiály magnetických obvodů 270
8.7. Příklady 274

9. Energie a síly v elektrickém a magnetickém poli 281
9.1. Energie a výkon ve stacionárním proudovém poli 281
9.2. Energie elektrostatického pole 284
9.2.1. Určení elektrostatické energie soustavy tvořené n náboji 284
9.2.2. Určení elektrostatické energie pomocí vektorů $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ 285
9.3. Princip minima elektrostatické energie 287
9.4. Síly v elektrostatickém poli 289
9.4.1. Síla působící na náboj v elektrickém poli 289
9.4.2. Výpočet síly z energie elektrického pole 290
9.5. Energie stacionárního magnetického pole 292
9.5.1. Určení energie stacionárního magnetického pole pomocí vektorů $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{B}$ 292
9.5.2. Určení energie stacionárního magnetického pole pomocí vektorového potenciálu $\boldsymbol{A}$ 293
9.6. Energetická vlastní a vzájemná indukčnost 297

9.6.1. Definice energetické vlastní indukčnosti....297
9.6.2. Definice energetické vzájemné indukčnosti....303
9.7. Energie magnetického pole ve feromagnetiku....308
9.8. Síly v magnetickém poli....312
9.8.1. Lorentzova síla působící na proudovodiče v magnetickém poli....312
9.8.2. Zobecněná Lorentzova síla....318
9.8.3. Výpočet síly pomocí energie magnetického pole....321
9.8.4. Výpočet sil pomocí Maxwellova magnetického tenzoru pnutí....324
9.8.5. Souvislost mezi zobecněnou Lorentzovou silou a rovnicemi plynoucími z Maxwellova magnetického tenzoru pnutí....329
9.8.6. Síly působící na rovnoběžné vodiče vícefázové soustavy....329
9.9. Příklady....334

10. Matematická analogie mezi základními zákony elektrického a magnetického pole....347
10.1. Matematická analogie stacionárních polí....347
10.2. Příklady....351

11. Časově proměnné elektromagnetické pole....355
11.1. Základní vlastnosti časově proměnného (nestacionárního) elektromagnetického pole....355
11.1.1. První Maxwellova rovnice....356
11.1.2. Druhá Maxwellova rovnice....357
11.1.3. Třetí a čtvrtá Maxwellova rovnice....362
11.1.4. Rovnice kontinuity elektrického proudu....362
11.2. Kvazistacionární elektromagnetické pole....362
11.3. Harmonické elektromagnetické pole....363
11.3.1. Komplexní reprezentace skalární harmonicky proměnné veličiny $v(t)$....364
11.3.2. Komplexní reprezentace vektorové harmonické veličiny $\boldsymbol{V}(t)$....365
11.3.3. Maxwellovy rovnice v komplexním vyjádření....366
11.4. Zákon zachování energie....368
11.4.1. Poyntingův vektor....368
11.4.2. Přenos elektromagnetické energie – dvojí koncepce....370
11.5. Elektrodynamické potenciály....372
11.6. Příklady....374

12. Elektromagnetické pole v pohybujícím se prostředí....381
12.1. Zákon elektromagnetické indukce v pohybujícím se prostředí....381
12.1.1. Integrální tvary indukčního zákona....381
12.1.2. Diferenciální tvary indukčního zákona....384
12.2. Pohybující se magnetické pole....390
12.2.1. Točivé magnetické pole....390
12.2.2. Postupné magnetické pole....397
12.2.3. Poznámka k „pohybu magnetického pole“....398
12.3. Vířivé proudy....398
12.3.1. Fyzikální podstata vířivých proudů....398

12.3.2. Experimenty s vířivými proudy 399
12.3.3. Jak se uplatňují vířivé proudy v praxi 401
12.4. Povrchový jev 404
12.4.1. Kvalitativní popis a fyzikální podstata povrchového jevu 404
12.4.2. Matematický model EPJ a jeho analytické řešení 413
12.4.3. Matematický model MPJ a jeho analytické řešení 420
12.5. Příklady 423

13. Numerické řešení kvazistacionárních problémů 427
13.1. Matematický model EPJ ve vodiči s časově harmonickým proudem 427
13.1.1. Spojitý matematický model pro EPJ ve vodiči libovolného průřezu 428
13.1.2. Postup při řešení matematického modelu pro EPJ 432
13.2. Matematický model EPJ ve vodiči s proudem časově obecného průběhu 438
13.2.1. Spojitý matematický model pro EPJ 439
13.2.2. Diskrétní matematický model pro EPJ 441
13.3. Elektrický vektorový potenciál 446
13.4. Elektromagnetické stínění 450
13.4.1. Elektrické stínění 450
13.4.2. Magnetické stínění 451
13.5. Řešení magnetického pole v nelineárním prostředí 455
13.6. Příklady 456

14. Elektromagnetické vlny 465
14.1. Vlnové rovnice elektromagnetického pole a jejich řešení 465
14.1.1. Formulace vlnových rovnic 465
14.1.2. Rovinná elektromagnetická vlna v dielektriku, obecně proměnná s časem 466
14.1.3. Harmonická REM vlna v dielektriku 470
14.1.4. Harmonická REM vlna ve vodivém prostředí 472
14.1.5. Polarizace elektromagnetických vln. Disperze vln 474
14.2. Přenos energie rovinnou vlnou v dielektriku 476
14.3. Dopad rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí 477
14.3.1. Kolmý dopad REM vlny na rozhraní 477
14.3.2. Šikmý dopad REM vlny na rozhraní 480
14.4. Elektrodynamické potenciály nestacionárního elektromagnetického pole. 481
14.5. Hertzovy vektory 483
14.6. Generování elektromagnetických vln 485
14.6.1. Elektromagnetické pole oscilujícího elektrického dipólu 486
14.6.2. Výkon vyzařovaný dipólem, vyzařovací odpor 490
14.6.3. Elektromagnetické pole oscilujícího magnetického dipólu 491
14.7. Příklady 492

15. Elektromagnetické pole v anizotropním prostředí 495
15.1. Anizotropie a její matematické vyjádření 495
15.1.1. Pojem anizotropie 495
15.1.2. Matematický popis anizotropie 496

15.2. Materiálové rovnice pro anizotropní prostředí 498
15.3. Rovnice stacionárního elektrického a magnetického pole v anizotropním prostředí 500

16. Dodatky 505
16.1. Existence a jednoznačnost řešení rovnic elektromagnetického pole 505
16.2. Přehled základních operací vektorového počtu 507
16.2.1. Vektorová algebra 507
16.2.2. Vektorová analýza 509
16.2.3. Některé důležité vzorce z vektorové analýzy 512
16.2.4. Některé integrální věty vektorové analýzy 512
16.2.5. Různé druhy vektorových polí 513
16.3. Veličiny teorie elektromagnetického pole a jejich jednotky 514
16.4. Základní operace vektorové analýzy v různých souřadných systémech 516
16.5. Tvůrci teorie elektromagnetického pole 518
16.6. Čeští a slovenští elektrotechnici, kteří přispěli k rozvoji teorie elektromagnetického pole 523

Literatura 527

Rejstřík 533

Věda je víc než soubor znalostí. Je to způsob myšlení.
Carl Sagan, americký astronom

PŘEDMLUVA

Makroskopická teorie elektromagnetického pole je teoretickým základem pro řadu elektrotechnických disciplin. Její základy vybudovali Michael Faraday a James Clerk Maxwell v 19. století. Rozvoj vědy a techniky v posledním čtvrt století, díky rozvoji počítačů, posunul teorii elektromagnetického pole k novému, vyššímu stupni vědeckého poznání a technického využití. Tento vývojový proces vedl k formulaci metod, jimiž lze zvládnout i velmi náročné problémy z oblasti silnoproudé i sdělovaní elektrotechniky, které nemají v minulosti obdoby.

Elektrotechnický inženýr řešící vývojové problémy by měl být vyzbrojen nejen podrobnými znalostmi se své specializace, ale i dobrými znalostmi teorie elektromagnetického pole, neboť z ní je nutno vycházet při projektování nových zařízení, které svou funkcí a případně svými parametry se výrazně liší od dosavadních. Projektant by se při tom neměl omezovat jen na matematické vztahy a měl by proniknout do „filozofie“ teorie elektromagnetického pole, neboť, jak upozornil již Ludwig Boltzmann, Maxwell ve své teorii předložil fyzikální názor a jeho teorie není jen pouhým *systémem Maxwellových rovnic*, ale i *Faradayovým světem představ*.

Tato publikace vznikla z autorových přednášek teorie elektromagnetického pole, které měl po řadu let na elektrotechnické fakultě Západočeské univerzity v Plzni. Je určena studentům bakalářského a inženýrského programu; má je vést nejen k hlubšímu pochopení základů Faraday-Maxwellovy teorie, ale i k ovládnutí způsobů, jimiž lze na základě této teorie řešit jednodušší problémy inženýrské praxe. Kniha je koncipována tak, aby nejenom předávala čtenářům poznatky, ale aby stimulovala tvůrčí způsoby studia. Pro větší názornost jsou teoretické partie doplněny řadou příkladů.

Autor vyjadřuje svůj srdečný dík paní profesorce Ing. Kláře Čápové, CSc. za recenzi rukopisu knihy. Na numerickém řešení některých příkladů se účinně podíleli moji kolegové, pánové Ing. Petr Kropík, PhD., Ing. Jan Mayer, Ing.Petr Polcar a doc. Ing. Bohuš Ulrych, CSc, soupis komerčních SW poskytl pan doc. Ing. Pavel Karban, PhD. Všem jmenovaným patří autorův dík.

Prof. Daniel Mayer
Plzeň, březen 2011.

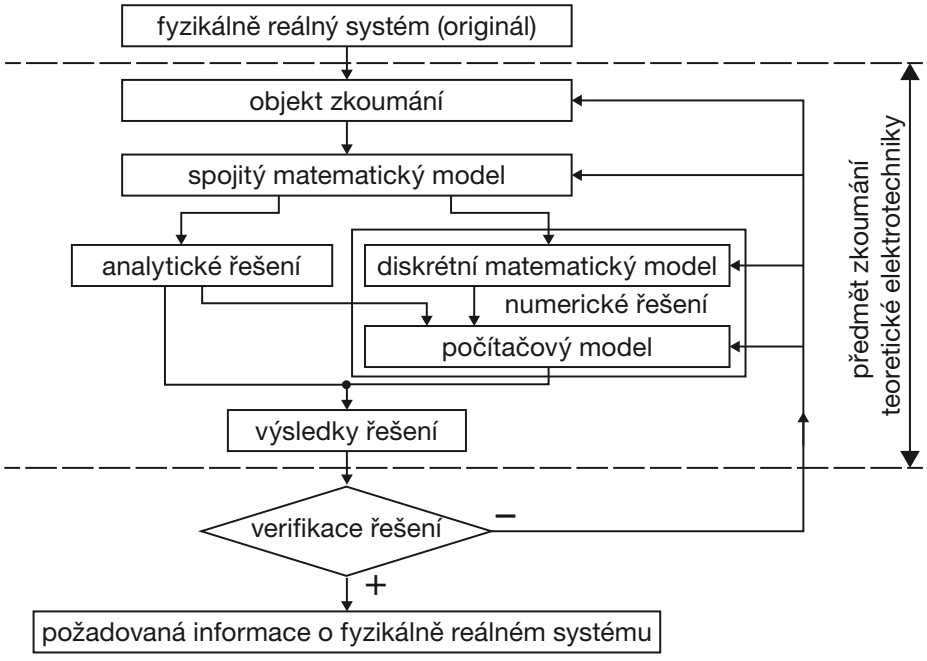
„… při pohledu na magnet je prostředí kolem něho právě tak podstatné, jako magnet sám, neboť je součástí skutečného a magnetického systému.“
M. Faraday,
Experimental Research in Electricity, r. 1839–1855

ÚVOD

0.1. Jak teoreticky řešíme elektrotechnické projekty

Při *teoretickém* vyšetřování vlastností nějakého elektrotechnického zařízení nikdy neprovádíme řešení na tomto skutečném zařízení – nazveme ho *fyzikálně reálným systémem,* čili *originálem*. Zabýváme se jeho více či méně zjednodušeným (idealizovaným) *modelem*, který je pro nás *objektem zkoumání*.

Postup našeho vyšetřování je znázorněn na obr. 0.1. Při sestavení modelu postupujeme tak, že abstrahujeme od jeho vlastností, které jsou pro zkoumaný jev nepodstatné a omezíme se na jeho vlastnosti, o kterých se domníváme, že zkoumaný jev ovlivňují a že je nelze zanedbat. Vyšetřované zařízení (tj. fyzikálně reálný systém) tím nahradíme (imitujeme) jeho více či méně jednodušším modelem (tj. objektem našeho zkoumání). Poté pomocí zákonů teorie elektromagnetického pole matematicky popíšeme sledované jevy v tomto modelu. Dostaneme tak *spojitý matematický model* a na jeho základě hledáme řešení.



Obr. 0.1. Postup při teoretickém řešení technických problémů.

K danému originálu lze obvykle přiřadit různé objekty zkoumání (modely) a tedy i různé matematické modely, lišící se svojí adekvátností (tedy i přesností) a ovšem i svojí složitostí. V jednodušších případech se často podaří nalézt *analytické řešení* spojitého matematického modelu. V současné době se ve stále větší míře uplatňuje jeho přibližné (aproximativní) *numerické řešení*. Od spojitého matematického modelu pak přecházíme k *diskrétnímu matematickému modelu*, který realizujeme na počítači. Na základě algoritmu řešení diskrétního modelu vytvoříme *výpočtový program*, který vložíme do počítače, čímž vytvoříme *počítačový model*. Tímto počítačovým modelem napodobujeme (simulujeme) řešený fyzikálně reálný systém a zkoumáme jeho vlastnosti a jevy, které nás zajímají. Tento postup nazýváme *počítačovou simulací*.

Jiný způsob řešení elektrotechnických problémů spočívá v přímém *experimentálním zkoumání* fyzikálně reálného systému, anebo jeho zmenšené (resp. zvětšené) kopii. To však bývá často velmi nákladné, technicky obtížné a mnohdy i nemožné. Naproti tomu s počítačovým modelem můžeme provádět různé simulační experimenty, které jsou operativní a nenákladné.

Speciálním objektem zkoumání je model, který nazýváme *elektrickým obvodem*. Při sestavování jeho matematického modelu zpravidla vycházíme z Kirchhoffových zákonů, které, jak ukážeme později, vyplývají ze základních zákonů teorie elektromagnetického pole. Podle objektu zkoumání tedy rozlišujeme *polní koncepci* a *obvodářskou koncepci* řešení elektrotechnických problémů.

Nesprávný, anebo nedostatečně přesný výsledek je důsledkem omylu v některé fázi řešení. Může se jednak např. o příliš silné zjednodušení originálu při konstrukci jeho modelu (objektu našeho zkoumání), nebo o chyby při formulaci a následném řešení spojitého matematického modelu. Při numerickém řešení může být zdrojem chyb příliš hrubá diskretizace spojitého matematického modelu, nebo chyba ve výpočtovém algoritmu, anebo programátorská chyba v počítačovém modelu. Aby bylo řešení spolehlivé, je nutná *verifikace* (ověření) *výsledků*, které jsme získali výpočtem. Verifikace se provádí tak, že výsledky výpočtu porovnáváme s jakýmikoliv srovnatelnými hodnověrnými údaji, například s výsledky měření na modelech nebo na obdobných realizovaných zařízeních, nebo porovnáním s dosavadními zkušenostmi, anebo třeba jen s „fyzikálním názorem“ na řešený problém. Jestliže vzniknou nesrovnalosti, je třeba identifikovat zdroje chyb a po jejich nalezení a opravení proces řešení opakovat.

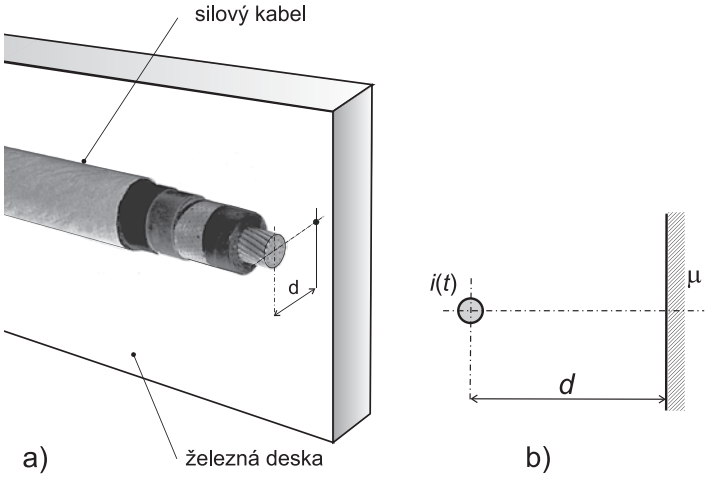
Fyzikálně reálné systémy nahrazujeme jen takovými modely (objekty zkoumání), které nejsou v rozporu s fyzikálními zákony (říkáme, že jsou *korektní*), mají jediné řešení (*existence* a *unicita* řešení), a přitom jsou dostatečně přesné (jsou *adekvátní*). Vyšší přesnost objektu zkoumání lze obvykle docílit za cenu jeho větší složitosti a tím i větší komplikovanosti spojitého matematického modelu. Praktickou cenu mají jen takové korektní modely, které jsou na jedné straně dostatečně adekvátní a na druhé straně jsou zvládnutelné s našimi matematickými znalostmi, resp. s výpočtovou technikou, kterou máme k dispozici. Pro úspěšné sestavování objektu zkoumání a posléze pro sestavení jeho matematického modelu je třeba dobře znát zákony elektromagnetického pole; uplatňuje se též zkušenost a intuice řešitele, čili „inženýrské umění“.

Porovnejme *analytické* a *numerické řešení* matematického modelu. Analytické řešení klade často vysoké nároky na matematickou erudici řešitele a lze jej realizovat jen pro

jednodušší objekty zkoumání. Jeho velkou výhodou je obecný charakter nalezeného řešení, které umožňuje hlubší pohled na zákonitosti sledovaných jevů, má tedy značnou cenu *predikční*. Naproti tomu numerické řešení umožňuje pracovat s objektem zkoumání, který může mít složitější strukturu než při řešení analytickém, může zahrnovat více podrobností, může mít mnohem větší rozlišovací úroveň a tedy více se přiblížit fyzikálně reálnému systému, může být více adekvátní. Další výhodou numerického řešení je, že povaha práce při počítačovém modelování je rutinní a platnost použitých postupů je ve značné míře *univerzální*. Nevýhodou numerického řešení je, že dosažené výsledky platí jen pro zcela konkrétní případ a naplatí obecně, což snižuje jejich prognostickou hodnotu.

Příklad 0.1.

Máme určit sílu, která působí na jednožilový kabel. Kabel je tvořen měděným elektrovodným lanem, má několikavrstvovou izolaci, je protékán proudem $i(t)$ a je uložen v blízkosti ocelové konstrukce, obr. 0.2a. Tomuto *fyzikálně reálnému systému* lze přiřadit různé modely, lišící se svou adekvátností. Jednoduchý model získáme například tím, že lano nahradíme tenkým vodičem a ocelovou konstrukci nahradíme deskou o nekonečné permeabilitě μ, obr. 0.2b. Pro tento objekt zkoumání pak sestavíme matematický model. V kapitole 9.8.1 ukážeme, že tento jednoduchý model lze snadno vyřešit analyticky. Kdybychom chtěli získat přesnější řešení, navrhneme objekt zkoumání, který bude složitější, avšak bude bližší fyzikálně reálnému systému. Například budeme respektovat skutečný průřez lana, skutečný tvar ocelové konstrukce a hodnotu její permeability. Matematický model bude složitější, jeho řešení bude obtížnější, avšak dosažené výsledky budou přesnější.



Obr. 0.2. Kabel uložený v blízkosti ocelové konstrukce:
a) fyzikálně reálný systém, b) jeden z možných modelů (objektů zkoumání).

Přechodu od fyzikálně reálného systému k jeho modelu se věnují různé elektrotechnické disciplíny, např. stavba elektrických strojů, elektrotepelná technika, elektroenergetika apod. V této knize se tím nebudeme zabývat. Budeme vycházet z daných objektů zkoumání, budeme pro ně sestavovat matematické modely a formulovat metody jejich řešení. Metodami verifikace výsledků se zde též nebudeme zabývat a ponecháme je zmíněným disciplinám.

0.2. Dvojí význam pojmu „pole“

Ve fyzice pracujeme buďto se *skaláry* (příkladem skaláru je teplota, práce, elektrický proud apod.), anebo s *vektory* (například síla, rychlost, zrychlení apod.). Některé fyzikální veličiny mohou mít i jiný, složitější matematický charakter (například *tenzory*). Je třeba rozlišovat mezi matematickým a fyzikálním pojmem pole.

Matematický význam pojmu pole

Skalární pole. Nechť je v prostorové (rovinné) oblasti Ω definována skalární funkce φ, která každému bodu B této oblasti přiřazuje právě jednu hodnotu reálného čísla φ (B). Pak říkáme, že v oblasti Ω je definováno *skalární pole* φ. Je-li oblast Ω rovinná, je *skalární pole rovinné* $\varphi\,(x,y)$, je-li oblast Ω prostorová, je *skalární pole prostorové* $\varphi\,(x,y,z)$. Příkladem prostorového skalárního pole je rozložení atmosférického tlaku v prostoru, v němž žijeme.

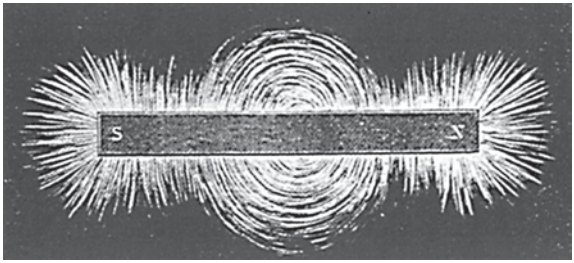
Vektorové pole. Nechť je v prostorové (rovinné) oblasti Ω definována vektorová funkce $\boldsymbol{F}$, která každému bodu B oblasti Ω přiřazuje právě jednu hodnotu vektoru $\boldsymbol{F}$(B). Pak říkáme, že v oblasti Ω je definováno *vektorové pole* $\boldsymbol{F}$, které může být rovinné $\boldsymbol{F}\,(x,y)$ a nebo prostorové $\boldsymbol{F}\,(x,y,z)$. Příkladem rovinného vektorového pole je silové pole: v oblasti mezi elektricky nabitým dlouhým vodičem uloženým nad zemí působí na elektricky nabité tělísko síla.

Fyzikální význam pojmu pole

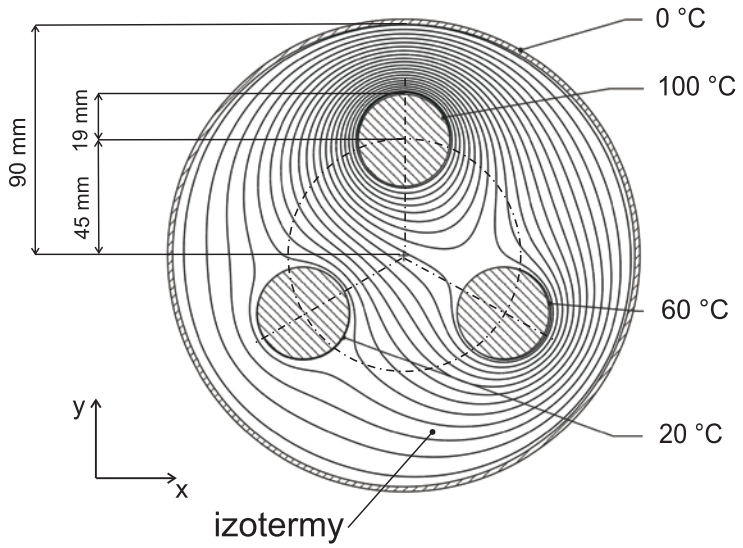
V elektromagnetizmu pracujeme s *elektromagnetickým polem* a s jeho speciálními případy, například s elektrostatickým polem, stacionárním magnetickým polem apod. Toto pole není jen matematickou abstrakcí, je *objektivní fyzikální realitou*, jejímiž vlastnostmi se budeme podrobně zabývat. Budeme zkoumat fyzikálně-matematické vlastnosti elektromagnetického pole a využijeme k tomu matematické pole, spolu s příslušným matematickým aparátem (zejména vektorovou analýzou). Tedy: *fyzikální pole budeme popisovat (modelovat) pomocí matematického pole*.

Vizualizace (zobrazení) fyzikálních polí

Michael Faraday, inspirován „pilinovými obrazci“ magnetického pole permanentních magnetů (obr. 0.3), zavedl pojmy *siločára* a *ekvipotenciální plocha*, resp. *ekvipotenciální křivka*. V oblasti kmitočtů, s nimiž pracujeme v elektrotechnických aplikacích, nelze elektromagnetické pole přímo vnímat lidskými smysly. Faraday zobrazil elektromagnetické pole pomocí siločar a ekvipotenciál a tím vytvořil jeho *geometrický model*, který je pro



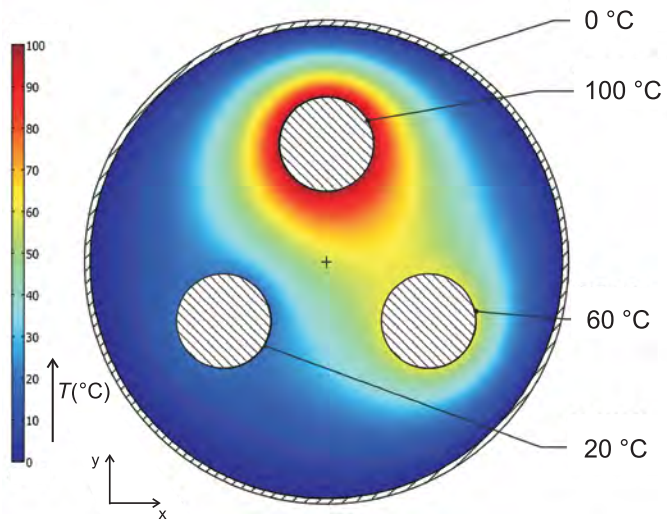
Obr. 0.3. Zobrazení magnetického pole tyčového magnetu pomocí železných pilin.



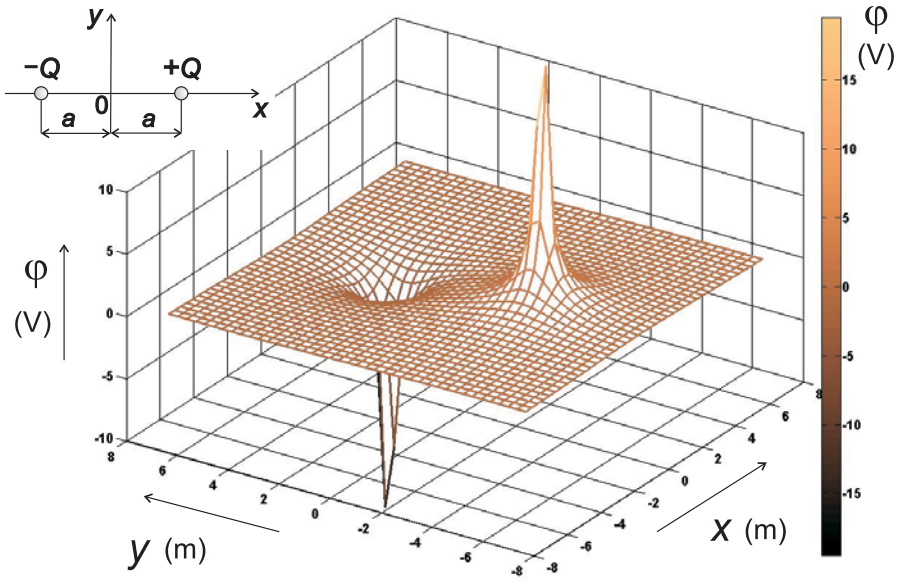
Obr. 0.4. Zobrazení teplotního pole v průřezu trojvodičového kabelu pomocí izoterm.

naše chápání srozumitelnější. Vizualizovat lze nejen elektromagnetické pole, ale i jiná fyzikální pole.

Uvedeme několik způsobů vizualizace různých fyzikálních polí. Použijeme při tom pojmy, s nimiž se čtenář seznámil při studiu fyziky. Jak první příklad uvedeme dvě možnosti zobrazení *rovinného skalárního pole* teplotního. Na obr. 0.4 je zobrazeno teplotní pole v průřezu trojvodičového kabelu pomocí izoterm. Vodiče kabelu mají teploty 20 °C, 60 °C a l00 °C, plášť kabelu má teplotu 0 °C. V grafu jsou v rovině (*x*,*y*) zakresleny křivky stejné teploty – *izotermy*. Jiný způsob zobrazení tohoto teplotního pole je na obr. 0.5. Izotermy

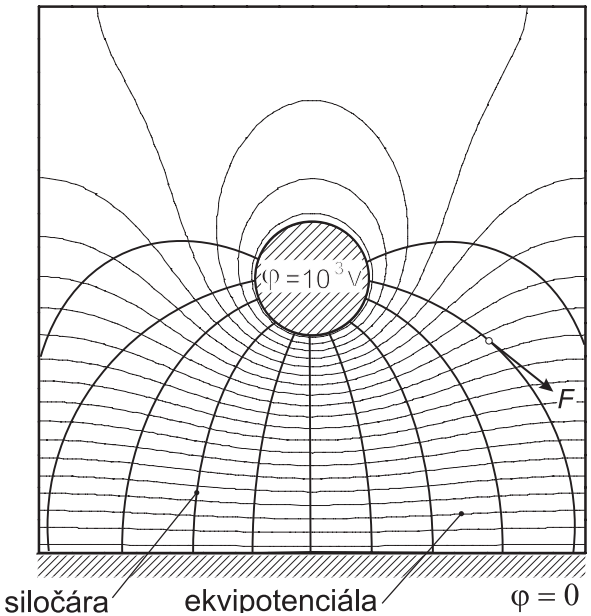


Obr. 0.5. Izotermy teplotního pole v průřezu trojvodičového kabelu, zobrazené barevnými suboblastmi.

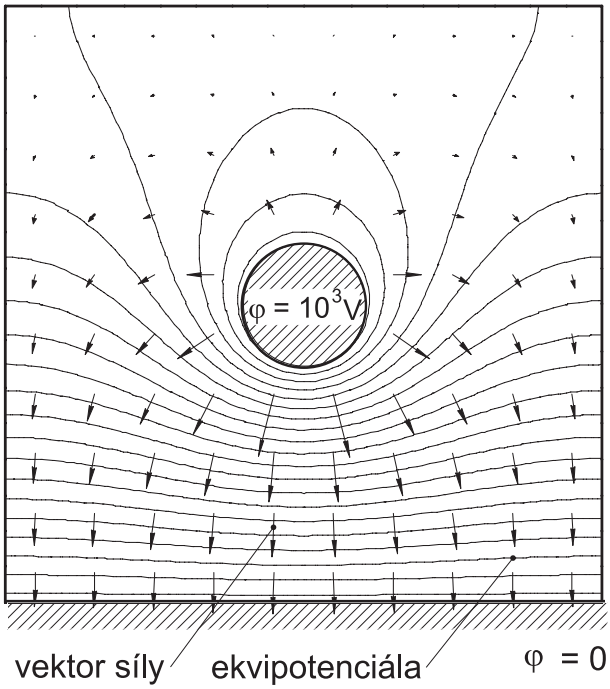


Obr. 0.6. Zobrazení elektrického potenciálu dvou bodových nábojů +Q, –Q v rovině (x,y).

jsou zde vyznačeny jako plošné barevné suboblasti, přičemž každé barvě odpovídají izotermy v jistém teplotním intervalu. S jiným příkladem rovinného skalárního pole se setkáváme na mapách při zobrazení reliéfu krajiny, kde místa stejné nadmořské výšky se vyznačují vrstevnicemi.



Obr. 0.7. Zobrazení silového (elektrického) pole pomocí siločar a ekvipotenciál u dlouhého vodiče nad zemí.

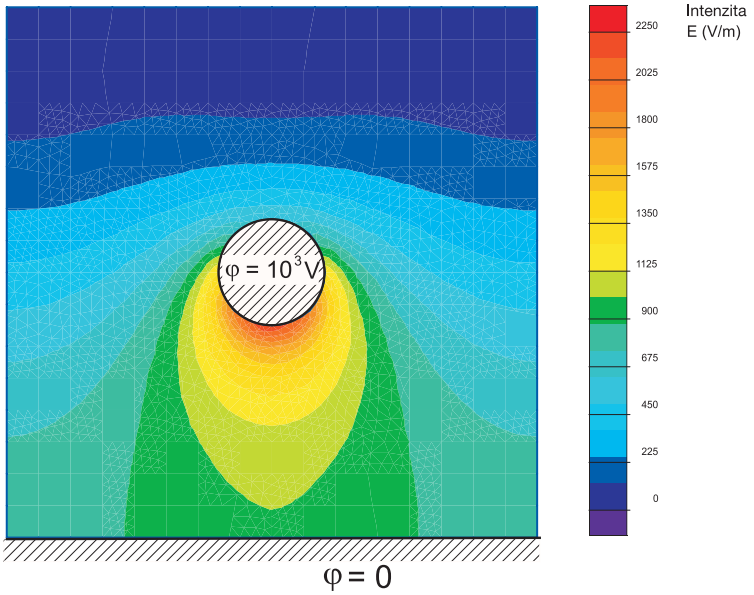


Obr. 0.8. Zobrazení silového (elektrického) pole pomocí vektorů sil a ekvipotenciál u dlouhého vodiče nad zemí.

Na obr. 0.6 je zakresleno rozložení elektrostatického pole dvojice bodových nábojů $+Q(a,0)$, $-Q(-a,0)$ v rovině (x,y). Elektrostatické pole je charakterizováno skalárním elektrickým potenciálem φ. Jeho hodnotu v kterémkoliv bodu roviny (x,y) lze z tohoto obrázku odečíst buďto jako pořadnici příslušného bodu zborcené plochy (tato plocha je na obrázku vyšrafována), anebo lze potenciál určit ze zabarvení tohoto bodu na zborcené ploše, podle připojené stupnice. (Konstrukce zobrazení podle obr. 0.6 je popsána v příkladu P.3.6 v závěru 3. kapitoly.)

Příkladem *rovinného vektorového pole* je silové (elektrické) pole vodiče nad zemí; napětí mezi vodičem a zemí je 1000 V. V grafu na obr. 0.7 je soustava křivek – siločar, z nichž každá má tu vlastnost, že tečna v kterémkoliv jejím bodě udává *směr* síly F působící na vložený náboj. (O *velikosti* síly toto zobrazení nic nevypovídá.). V tomtéž obrázku jsou zakresleny křivky konstantního potenciálu (ekvipotenciály). Jiný způsob zobrazení tohoto pole je na obr. 0.8: silové pole je zde zobrazeno „oblakem“ šipek, z nichž každá udává svým směrem *směr* síly a délkou *velikost* síly. Na obr. 0.9 je další způsob zobrazení rozložení silového pole a sice pomocí barevných suboblastí. Každé barvě suboblasti přísluší síla, jejíž velikost lze odečíst z připojené stupnice. (O směru síly tento graf neinformuje.)

Poznamenejme, že vizualizace fyzikálních polí dává dobrou představu o globálním rozložení příslušného pole v prostoru, resp. v rovině. Má velký význam pro rychlou orientaci v řešeném problému, avšak přesnost, s níž jsou vyjadřovány výsledky, je nevalná.



Obr. 0.9. Zobrazení elektrického pole dlouhého vodiče nad zemí pomocí velikosti intenzity elektrického pole.

0.3. Elektromagnetické pole a technické projekty

Student, který stojí před úkolem proniknout do teorie elektromagnetického pole, si může klást otázku, zda je zvládnutí tohoto nelehkého vědního oboru nutné pro pochopení dalších předmětů zvoleného studijního programu a později pro úspěšné uplatnění v praxi. Může si klást otázku, proč se má učit řešit „nějaké elektromagnetické pole“, když jeho budoucí zaměstnavatel bude požadovat, aby vyřešil konkrétní elektrotechnický problém, který s elektromagnetickým polem (zdánlivě) nikterak nesouvisí. Například, aby rozhodl, zda navržený elektromotor nebude příliš hlučet, jakou má účinnost, nebo zda se v provozu příliš neoteplí. Student může ve svých pochybnostech vycházet z představy, že na všechny praktické úkoly jsou dnes k dispozici určité formule, výpočtové postupy, anebo více či méně dokonalý počítačový software, který s minimem řešitelovy námahy vygeneruje požadované výsledky. Takto kladené otázky však nejsou správné.

Pro elektrotechnického inženýra je teorie elektromagnetického pole základním nástrojem pro řešení technických projektů. Hloubka nutného poznání této teorie závisí na náročnosti řešených projektů. Můžeme rozlišovat tyto kategorie:

- Jestliže se jedná o řešení standardních úkolů, které už byly v obecné rovině rozřešeny a zpracovány do vzorců, postupů, počítačových programů apod., pak musí řešitel porozumět teorii elektromagnetického pole alespoň do té míry, aby si uvědomil meze platnosti zmíněných výpočtových pomůcek, aby byl schopen bezchybně formulovat vstupní data a správně interpretovat dosažené výsledky.

- Mnohé úkoly jsou však náročnější, vyžadují hlubší znalosti probíhajících elektromagnetických jevů, pro jejichž řešení doposud nejsou k dispozici spolehlivé výpočtové prostředky. Pak je třeba vycházet z obecných zákonů a metod teorie elektromagnetického pole a způsob výpočtu je třeba tvůrčím způsobem vytvářet.

Není oprávněná ani námitka, že projektanta nezajímá „nějaké elektromagnetické pole", ale jiné, praktické údaje. Například vyšetříme-li elektrického pole v izolačním systému, pak jsme tím přímo nalezli elektrické namáhání izolace a můžeme rozhodnout, zda je ohrožena elektrická pevnost izolace. V mnohých jiných případech požadujeme určení jiných veličin, než jsou veličiny elektromagnetického pole. Jako příklad uveďme určení kapacity pro různou konfiguraci elektrod, nebo vlastní či vzájemnou indukčnost pro různé cívky, sílu elektromagnetů, točivý moment elektrického stroje, stanovení oteplení či mechanického namáhání různých elektrotechnických zařízení, určení vibrací, hluku a mnohé další. *Všechny tyto veličiny lze stanovit, jestliže vyřešíme příslušné elektromagnetické pole*. Přitom vyšetření elektromagnetického pole bývá tou obtížnější částí řešené úlohy.

Nezřídka se setkáváme s požadavkem vyšetřit složité fyzikální jevy, u nichž se uplatňuje nejen elektromagnetické pole, ale současně též další fyzikální pole (například tepelné pole, pole mechanického pnutí apod.), přičemž tato pole jsou spolu spojena. Hovoříme o *sdružený problémech*. U některých sdružených problémů lze řešit jednotlivá fyzikální pole odděleně – jde o tzv. *slabě sdružené problémy*. Příkladem slabě sdruženého problému je běžný návrh transformátoru. Tam se uplatňuje elektromagnetické pole a zároveň též pole teplotní. Vycházíme z toho, že teplotu vinutí známe – je omezena vlastnostmi izolace vinutí. Elektromagnetický výpočet a následný tepelný výpočet probíhají odděleně. Kdyby tepelný výpočet vedl k nižším teplotám než předpokládáme, byl by stroj nevyužit, v opačném případě by byl přetížen. V obou případech by bylo nutno elektromagnetický výpočet upravit. Jindy jsou poměry složitější: jednotlivá fyzikální pole jsou spolu vázána a nutno je řešit současně – jde o tzv. *silně sdružené problémy*. Řešení silně sdružených problémů bývá náročné a často se je daří zvládnout jen s nasazením výkonných hardwarových a softwarových prostředků. Příkladem je analýza procesu indukčního tavení, kdy hustota indukovaných proudů v roztavené vsázce závisí na rozložení teploty ve vsázce a ta dále závisí na rychlosti proudění roztavené vsázky. Současně se tedy uplatňují nejen jevy elektromagnetické, ale též jevy tepelné a jevy hydrodynamického proudění.

Elektromagnetické pole je pro moderního fyzika tak reálné,
jako židle na níž sedí.
Albert Einstein

1. Základní pojmy a zákony teorie elektromagnetického pole

Tato kapitola navazuje na znalosti, které čtenář získal studiem fyziky a úvodních elektrotechnických předmětů. Uvádí stručný přehled veličin, jejich jednotek a základních pojmů a zákonů teorie elektromagnetického pole, v rozsahu potřebném pro porozumění dalších kapitol.

1.1. Vznik a vývoj teorie elektromagnetického pole

Elektrické a magnetické jevy jsou soustavně zkoumány od konce 18. století. Na odhalování zákonitostí těchto jevů se podílela řada význačných badatelů, jako např. Ch. A. Coulomb, A. Volta, H. Ch. Oersted, J. F. Biot, F. Savart, G. S. Ohm a G. R. Kirchhoff. Významné objevy učinil *André Maria Ampère,* který též systematicky zpracoval veškeré tehdejší představy o elektřině a magnetizmu a toto své dílo označil jako „elektrodynamiku". Zdrojem nových poznatků o elektřině a magnetismu byly experimenty *Michaela Faradaye*, který v r. 1831 objevil zákon elektromagnetické indukce. Hloubavý duch Faradayův se nespokojil s odhalováním zákonitostí jevů, ale snažil se vysvětlit jejich fyzikální podstatu. Za jednu z největších ve fyzice se považuje jeho revoluční myšlenka, že nestačí zkoumat samotné elektrické náboje, magnety, proudovodiče apod., ale je nutno zkoumat i vlastnosti jisté hypotetické látky – nazývala se *éterem* (též *elektromagnetický*, *světelný* nebo *světový éter*) – která vyplňuje jejich okolní prostor. Na rozdíl od newtonské představy, že tyto objekty na sebe působí „do dálky", se podle Faradayovy představy jejich vzájemné působení děje prostřednictvím tohoto „éteru" a to konečnou rychlostí; hovoříme o působení „do blízka". Označení éter bylo později nahrazeno výstižnějším názvem *elektromagnetické pole*.

Faraday dospěl ke svým poznatkům geniálními experimenty; nebyl matematicky vzdělán, nesnažil se používat matematiku a své objevy vyjadřoval výhradně verbálně. Úlohy formulovat Faradayovy myšlenky jazykem matematiky se ujal *James Clerk Maxwell*, který Faradayovy poznatky geniálním způsobem zobecnil a ve svém slavném dvoudílném spise *A Treatise on Electricity and Magnetism* z r. 1873 formuloval ucelený matematický model vyjadřující časově-prostorové zákony pro všechny do té doby zjištěné elektrické a magnetické jevy. Někteří Maxwellovy současníci uvítali Maxwellovo dílo, pro mnohé však bylo „nenázorné" a nesrozumitelné. Jejich námitky, vyvolané netradičním pojetím

a uplatněním originálních (a tedy nezvyklých) myšlenek, ale též jeho formální komplikovaností, bránily rychlému přijetí a rozšíření Maxwellovy teorie.

Tak jako po Faradayovi musel přijít Maxwell, aby vyjádřil Faradayovy myšlenky matematicky, museli po Maxwellovi přijít další, kteří nahradili Maxwellem použitý matematický aparát (tzv. kvaternionový počet) způsobem jednodušším a vhodnějším pro technické aplikace. Kromě toho bylo nutné experimentálně ověřit některé Maxwellovy intuitivní předpoklady. Zasloužili se o to zejména *Oliver Heaviside* a *Heinrich Hertz*. Heaviside byl průkopníkem a pokračovatelem Maxwellových myšlenek. Byl jedním ze zakladatelů vektorové analýzy, kterou pak použil k formulaci Maxwellovy teorie. V Heavisideově formulaci nabyly základní zákony Maxwellovy teorie elektromagnetického pole elegantní a přehledný tvar. Dnes tvoří pevný základ teorie elektromagnetického pole a na Maxwellovu počest se nazývají *Maxwellovy rovnice*. Hertz, z podnětu svého učitele na berlínské univerzitě Hermanna Helmholtze, zkoumal, zda elektromagnetické vlny, jejichž matematické vyjádření vyplývá z Maxwellových rovnic, skutečně existují, anebo jsou jen matematickou fikcí. Po sedmiletém úsilí, v r. 1888, Hertz svými slavnými experimenty prokázal, že elektromagnetické vlny jsou objektivní realitou. Prokázal nejen jejich existenci, ale též prozkoumal jejich zákony šíření, odrazu, polarizace a lomu. Hertz tak devět let po Maxwellově smrti potvrdil a rozvinul jeho teorii. Třebaže se Hertz do konce svého života domníval, že elektromagnetické vlny nemají valný praktický význam, otevřel cestu k soudobým telekomunikačním technologiím, které zásadně ovlivňují lidskou civilizaci.

Maxwellova teorie elektromagnetického pole je *fenomenologická* a *makroskopická,* neboť je založena na pozorovatelných makroskopických jevech (fenoménech), zejména na Faradayových experimentech, a nezabývá se hypotézami, jimiž lze tyto jevy vysvětlit. Touto teorií nelze řešit otázky, při nichž se uplatňuje molekulová a fyzikální struktura. Pro elektromagnetická pole v mikroskopických (atomárních) měřítkách prohloubil Maxwellovu teorii v r. 1895 *Hendrik Antoon Lorentz* a dospěl k *mikroskopické (elektronové) teorii elektromagnetického pole,* jíž později vystřídala *kvantová elektrodynamika*. Klasická Maxwellova teorie má ještě další omezení: platí jen pro látková prostředí v klidu. Poměrně snadno ji lze zobecnit na systémy, které se pohybují, avšak nerelativistickými rychlostmi. Na základě speciální teorie relativity formulované v r. 1905 *Albertem Einsteinem* byla počátkem 20. století vybudována teorie elektromagnetického pole i pro soustavy, které se pohybují relativistickými rychlostmi – *relativistická elektrodynamika*.

V době Faradaye a Maxwella se nepodařilo uspokojivě vysvětlit fyzikální podstatu elektromagnetického pole, bylo však zřejmé, že elektrické a magnetické jevy neprobíhají v „prázdném prostoru" a že toto pole reálně existuje. Teprve poznatky Heavisidea, Hertze a dalších (např. J. H. Poyntinga, P. N. Lebeděva aj.) a především pak speciální teorie relativity ukázaly, že elektromagnetickému poli je nutno přisuzovat určitou energii, hybnost a setrvačnost, tedy ty základní atributy, které náleží každé látce. Dospělo se tak k poznatku, že *elektromagnetické pole je jednou z forem hmoty.*

Cílem této knihy je poskytnout čtenáři nástroj pro řešení technických problémů a naučit ho s ním pracovat. Omezíme se na makroskopickou a nerelativistickou teorii, která je základní pracovní metodou v mnoha klíčových oborech soudobé elektrotechniky.

1.2. Základní pojmy a problémy teorie elektromagnetického pole

Náboje na elektrodách, proudy ve vodičích, permanentní magnety apod. jsou *zdroji* elektromagnetického pole, které indukují ve svém okolí. Toto elektromagnetické pole, které je rozloženo v prostoru, se může měnit s časem.

Základní úlohy v teorii elektromagnetického pole jsou:

- *Analýza pole:* je dáno časoprostorové rozmístění zdrojů pole (tj. nábojů, proudů apod.), určujeme veličiny, které charakterizují časové a prostorové rozložení elektromagnetického pole. Problém analýzy má (z fyzikálního hlediska) jediné řešení.
- *Syntéza pole:* v jisté prostorové oblasti je dán (resp. předepsán) časoprostorový průběh elektromagnetického pole. Určujeme prostorové rozmístění a časový průběh zdrojů pole. Syntéza zpravidla nemá jen jediné řešení. Požadované pole lze zpravidla realizovat více (často nekonečně mnoha) způsoby rozmístění zdrojů, anebo je realizovat nelze.

V dalším se budeme věnovat především metodám analýzy.

1.3. Význam teorie elektromagnetického pole pro provádění inženýrských projektů

Z hlediska elektrotechnické praxe nebývá vyšetření elektromagnetického pole konečným požadovaným výsledkem. Zpravidla nás zajímá:

- *interakce mezi polem a látkou* (např. elektrické namáhání izolace, elektromagnetická indukce ve vodičích), nebo
- *interakce mezi polem a jeho zdroji* (např. silové působení na tělesa s náboji, nebo na proudovodiče), popřípadě
- *vyšetření hodnot parametrů prvků elektrických obvodů* (tj. určení kapacit kondenzátorů, odporu vodičů a indukčností cívek).

Vyšetření elektromagnetického pole je tou nejdůležitější a zpravidla též nejobtížnější etapou výpočtů.

1.4. Veličiny elektromagnetického pole a jejich jednotky

Uvedeme stručný přehled veličin používaných v teorii elektromagnetického pole a jejich jednotek (v soustavě SI), a budeme předpokládat, že čtenář se s touto problematikou seznámil v předchozím studiu.

- **Elektrický náboj** Q je skalární veličinou. Jednotkou je coulomb [C]. Experimentálně bylo zjištěno, že náboj jako fyzikální veličina má výjimečné vlastnosti:

– platí *princip zachování náboje* (tj. náboj je nevytvořitelný a nezničitelný),

– množství kladných nábojů je rovno množství záporných nábojů (tj. příroda jako celek je elektricky neutrální) a

– náboj má kvantový charakter (tj. je roven celistvému násobku elementárního náboje $e = 1{,}162.10^{-19}$ C).

Náboj Q může být rozložen

– prostorově v objemu V, s *objemovou hustotou*

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} \qquad \left[\mathrm{C/m^3}\right] \tag{1.1}$$

– plošně na ploše S, s *plošnou hustotou*

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} \qquad \left[\mathrm{C/m^2}\right] \tag{1.2}$$

– lineárně na křivce l, s *lineární hustotou*

$$\tau = \frac{\mathrm{d}Q}{dl} \qquad \left[\mathrm{C/m}\right] \tag{1.3}$$

– nebo může být náboj *diskrétní* (tj. je soustředěn do bodu).

Rozlišujeme *volné náboje* – mohou se přemisťovat v makroskopických vzdálenostech, a *vázané náboje* – mohou se přemisťovat jen v mikroskopických vzdálenostech. Volnými náboji jsou volné elektrony v kovech nebo ionty v elektrolytech (jsou odpoutány od atomů, resp. molekul a volně se mezi nimi pohybují). Vázané náboje vznikají polarizací dielektrika.

■ **Elektrický proud** I (resp. i) je skalární veličinou. Je tvořen uspořádaným pohybem elektrických nábojů. Projde-li průřezem vodiče S za čas t náboj Q, prochází jím elektrický proud

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \left[\mathrm{A}\right] \tag{1.4}$$

Speciálně: pohybuje-li se náboj Q vodičem rovnoměrně, nazýváme proud *stejnosměrným* $I(t)$ = konst., a platí

$$I = \frac{Q}{t} \qquad \left[\mathrm{A}\right] \tag{1.5}$$

Příklad 1.1.

Vodičem prochází proud $I(t) = 10 \sin \omega t$, $f = 1000$ Hz. Určete náboj, který projde průřezem vodiče v časovém intervalu <0, T/4>.

Řešení:

$$Q = \int_0^{T/4} 10 \sin \omega t \,\mathrm{d}t = \frac{10}{\omega}\left[-\cos \omega t\right]_0^{T/4} = \frac{10}{2\pi.10^3} = 1{,}59\,\mathrm{mC}$$

Elektromagnetické pole má dvě složky: *elektrické pole* a *magnetické pole*. Tato pole jsou charakterizována vektorovými veličinami $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$, definovanými takto:

- **Intenzita elektrického pole** $\boldsymbol{E}$ je vektorovou veličinou definovanou jako síla působící na jednotkový bodový náboj Q:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{e}}{Q} \tag{1.6}$$

kde $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$ je síla, kterou působí elektrické pole na částici s nábojem Q; částice může být v klidu nebo v pohybu. Jednotkou intenzity elektrického pole je volt na metr [V/m].

- **Magnetická indukce** $\boldsymbol{B}$ je vektorovou veličinou implicitně definovanou výrazem

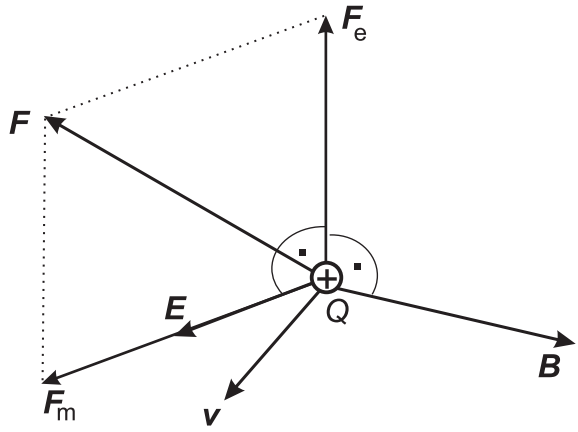
$$\boldsymbol{F}_\mathrm{m} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.7}$$

kde $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$ je síla, kterou působí magnetické pole na částici s nábojem Q pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$. Jednotkou magnetické indukce je tesla [T].

- **Lorentzova síla** je síla, kterou působí elektromagnetické pole na částici s nábojem Q, pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ (obr. 1.1):

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{e} + \boldsymbol{F}_\mathrm{m} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.8}$$

Jednotkou síly je newton [N].



Obr. 1.1. K Lorentzově síle.

Intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ a magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ jsou základními veličinami, které charakterizují elektromagnetické pole. Je-li pole ve vakuu, jsou tyto veličiny postačující.

V látkovém prostředí zavádíme ještě další dvě vektorové veličiny: pro elektrické pole elektrickou indukci $\boldsymbol{D}$ a pro magnetické pole intenzitu magnetického pole $\boldsymbol{H}$.

- **Elektrická indukce** $\boldsymbol{D}$ je s vektorem intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ vázána vztahem[1)]

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad [\mathrm{C/m^2}] \tag{1.9}$$

kde veličina ε charakterizuje elektrické vlastnosti prostředí a nazývá se *permitivita*.

1) Ve starší literatuře se pro vektor $\boldsymbol{D}$ používá název *elektrické posunutí*, který zavedl Maxwell.

- **Intenzita magnetického pole** $\boldsymbol{H}$ je s vektorem magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ vázána vztahem

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \qquad [\mathrm{A/m}] \tag{1.10}$$

kde veličina μ charakterizuje magnetické vlastnosti prostředí a nazývá se *permeabilita*. Její převrácené hodnota, $1/\mu = \nu$, se nazývá *reluktivita*.

- **Proudová hustota (hustota vodivého proudu)** $\boldsymbol{J}$ vyjadřuje náboj, který projde za 1 s jednotkovou plochou průřezu vodiče. Je definována vztahem

$$\boldsymbol{J} = \rho^{+}\boldsymbol{v} \quad [\mathrm{A/m^2}] \tag{1.11}$$

kde ρ^{+} je objemová hustota kladných nosičů proudu a $\boldsymbol{v}$ je rychlost jejich pohybu v daném bodě. S intenzitou elektrického pole $\boldsymbol{E}$ je vázána *Ohmovým zákonem v diferenciálním tvaru*

$$\boldsymbol{J} = \gamma\,\boldsymbol{E} \quad [\mathrm{A/m^2}] \tag{1.12}$$

kde veličina γ charakterizuje elektrickou vodivost prostředí a nazývá se *konduktivita*. Její převrácená hodnota, $1/\gamma = \rho$, charakterizuje elektrický odpor prostředí a nazývá se *rezistivita***.**

Pro zobrazení (vizualizaci) elektromagnetického pole používáme *vektorové čáry* uvedené v tab. 1.1.

Tabulka 1.1. Vektorové čáry zobrazující elektromagnetické pole.

Čára vektoru:	Název:
$\boldsymbol{E}$	elektrické silové čáry (siločáry)
$\boldsymbol{B}$	magnetické indukční čáry
$\boldsymbol{D}$	elektrické indukční čáry
$\boldsymbol{H}$	magnetické silové čáry (siločáry)
$\boldsymbol{J}$	(elektrické) proudnice

Z fyzikálního hlediska by bylo logické zaměnit názvy veličin $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$: $\boldsymbol{B}$ nazývat intenzitou magnetického pole a $\boldsymbol{H}$ magnetickou indukcí. Výše uvedené terminologie vznikla v počátcích vývoje teorie elektromagnetického pole, je všeobecně používaná a proto se ji v dalším přidržíme.

- **Stavové vektory.** Tak souhrnně nazýváme veličiny $\boldsymbol{E, B, D, H, J}$, které jsou *lokálními charakteristikami* elektromagnetického pole.

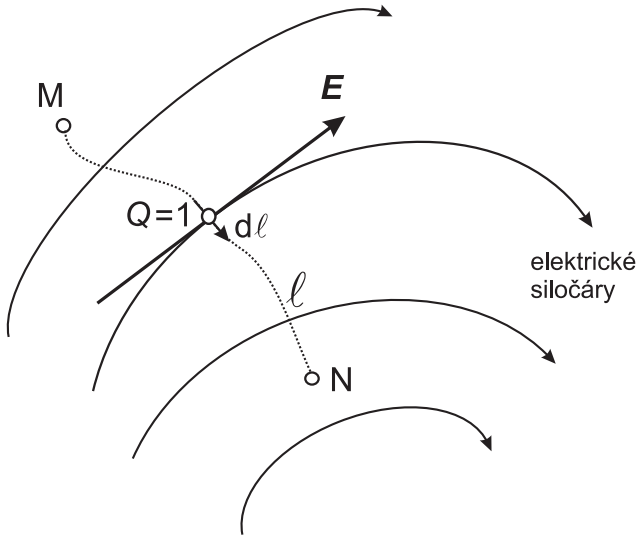
- **Regulární body.** Body prostoru, v nichž jsou stavové vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B, D, H, J}$ spojité a spojitě diferencovatelné funkce polohy nazýváme *regulárními* (též *normálními*) *body* elektrického a magnetického pole. Regulárními nejsou například body rozhraní dvou různých prostředí. V elektrickém poli nejsou regulárními body, v nichž jsou umístěny

diskrétní bodové náboje, v magnetickém poli nejsou regulárními body na proudových vláknech zanedbatelné tloušťky.

Integrální charakteristiky elektromagnetického pole jsou:

- **Elektrické napětí.** Mezi body M a N je elektrické napětí vyjádřeno křivkovým integrálem podél orientované křivky l (obr. 1.2). Je definované vztahem

$$U_{\mathrm{MN}} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad [\mathrm{V}] \tag{1.13}$$



Obr. 1.2. K definici elektrického napětí.

Jednotkou je volt [V]. Elektrické napětí lze fyzikálně interpretovat jako práci vykonanou silami elektromagnetického pole při přemisťování kladného jednotkového bodového náboje z bodu M do bodu N. Vyplývá to z následující úvahy. Přemístíme-li elektrický náboj Q , pohybující se v elektromagnetickém poli rychlostí $\boldsymbol{v}$ z bodu M do bodu N, vykoná Lorentzova síla práci

$$A = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = Q\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} + Q\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.14}$$

Protože vektor d$\boldsymbol{l}$ je kolineární s vektorem $\boldsymbol{v}$, je vektor $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ kolmý k vektoru d$\boldsymbol{l}$ a tedy druhý sčítanec je nulový. Pro $Q = 1$ dostáváme rov. (1.13).

- **Magnetické napětí** mezi body M a N podél křivky l je definováno obdobně:

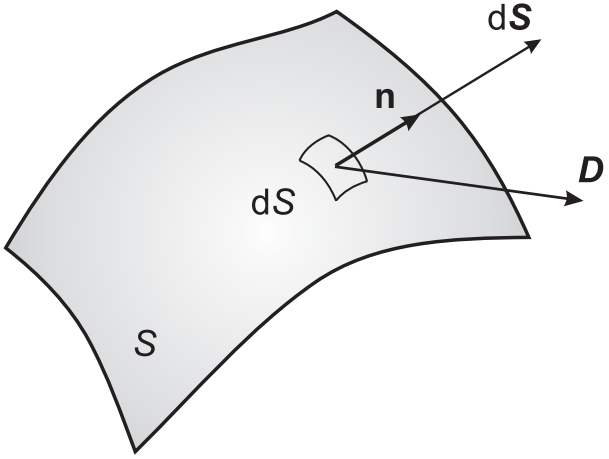
$$U_{\mathrm{mMN}} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad [\mathrm{A}] \tag{1.15}$$

Jednotkou magnetického napětí je ampér [A].

- **Elektrický indukční tok** je tok vektoru ***D*** orientovanou plochou *S* (obr. 1.3):

$$\psi = \int_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad [\mathrm{C}] \tag{1.16}$$

Jednotkou je coulomb [C].



*Obr. 1.3. K pojmu „tok vektoru **D** plochou S“.*

- **Magnetický indukční tok** je tok vektoru ***B*** orientovanou plochou *S*:

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad [\mathrm{Wb}] \tag{1.17}$$

Jednotkou je weber [Wb].

- **Elektrický proud** je tok vektoru ***J*** orientovanou plochou *S*:

$$I = \int_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad [\mathrm{A}] \tag{1.18}$$

Jednotkou je ampér [A].

Vztahy mezi stavovými veličinami ***E*** a ***D***, ***H*** a ***B***, ***J*** a ***E*** v látkovém prostředí, vyjádřenými rovnicemi (1.9), (1.10) a (1.12), obsahují veličiny ε, μ, γ , které charakterizují elektrické a magnetické vlastnosti tohoto prostředí (materiálu); nazývají se proto *materiálové vztahy* a veličiny ε, μ, γ nazýváme *materiálovými charakteristikami*.

1.5. Materiálové charakteristiky

Rozlišujeme tyto obecné fyzikální materiálové vlastnosti prostředí, v němž je rozloženo elektromagnetické pole.

1. *Prostředí izotropní/anizotropní:*

   izotropní / anizotropní ⟩ vlastnosti ⟨ nezávisí / závisí ⟩ na směru stavových vektorů.

2. *Prostředí homogenní/nehomogenní:*

   homogenní / nehomogenní ⟩ vlastnosti ⟨ nezávisí / závisí ⟩ na místě v němž se určují.

3. *Prostředí lineární/nelineární:*

   lineární / nelineární ⟩ vlastnosti ⟨ nezávisí / závisí ⟩ na velikosti stavových vektorů.

4. *Prostředí měkké/tvrdé*

   měkké / tvrdé ⟩ nepůsobí-li pole, prostředí ⟨ není / může být ⟩ permanentně polarizované.

5. *Prostředí bez hystereze/s hysterézí*

   bez hystereze / s hysterézí ⟩ vlastnosti ⟨ nezávisí / závisí ⟩ na fyzikálním stavu v minulosti.

V tab. 1.2 je vyznačen matematický charakter materiálových charakteristik pro různé druhy prostředí:

Tabulka 1.2. Materiálové charakteristiky pro různé druhy prostředí.

Hodnota materiálové charakteristiky ε, μ, γ	*Název prostředí*	*Matematický charakter materiálové charakteristiky*
nezávisí na směru	izotropní	skalár
závisí na směru (tj. v daném bodu jsou hodnoty materiálové charakteristiky v různých směrech různé)	anizotropní	tenzor
v různých bodech prostředí je táž	homogenní	konstanta
v různých bodech prostředí je různá	nehomogenní	funkce polohy
nezávisí na hodnotě stavových vektorů	lineární	konstanta
závisí na hodnotě stavových vektorů	nelineární	funkce velikosti příslušného stavového vektoru

Zprvu se omezíme na jednodušší případy, kdy prostředí je *izotropní*, *homogenní* a *lineární*. V tomto prostředí jsou příslušné materiálové charakteristiky ε, μ, γ skalární konstanty. Všimněme si jednotlivých materiálových charakteristik.

- **Dielektrika (izolanty)** jsou charakterizována *permitivitou* ε:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad [\mathrm{F/m}] \tag{1.19}$$

kde: $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ [F/m] se nazývá *permitivita vakua,*
ε_r [–] je *relativní permitivita*.

Pro vakuum je $\varepsilon_r = 1$, pro vzduch počítáme s $\varepsilon_r \approx 1$ a pro všechna další dielektrika je $\varepsilon_r > 1$; tyto hodnoty se určují pro různé izolanty měřením (viz např. tab. 2.1).

- **Vodiče** jsou charakterizovány *konduktivitou* γ, resp. *rezistivitou* $\rho = 1/\gamma$ (viz tab. 2.2).

  Často počítáme s těmito přibližnými hodnotami konduktivity, resp. rezistivity:
  – dokonalý (ideální) vodič: $\gamma \to \infty$, resp. $\rho = 0$,
  – dokonalý (ideální) izolant: $\gamma \to 0$, resp. $\rho \to \infty$.

- **Magnetika** jsou charakterizována *permeabilitou* μ:

  $$\mu = \mu_0 \mu_r \quad \text{[H/m]} \tag{1.20}$$

  kde: $\mu_0 = 4\,\pi.10^{-7}$ [H/m] se nazývá *permeabilita vakua,*
  μ_r [–] je *relativní permeabilita*.

  Pro diamagnetické a paramagnetické látky zpravidla počítáme s $\mu_r \approx 1$ (viz tab. 2.3); feromagnetické látky jsou nelineárním prostředím, $\mu_r = \mu_r(H)$, přičemž $\mu_r >> 1$. Často počítáme s dokonalým (ideálním) feromagnetikem, jehož permeabilita je $\mu \to \infty$.

1.6. Maxwellovy rovnice

Snahou každé exaktně budované vědní disciplíny je formulovat základní zákony. Například v klasické mechanice jsou to Newtonovy zákony, v teorii proudění Navierova-Stokesova rovnice a v makroskopické teorii elektromagnetického pole jsou to *Maxwellovy rovnice*. Z nich vyplývají, jako speciální případy, další elektrotechnické zákony. Zákony teorie elektromagnetického pole mají tedy *hierarchickou strukturu*.

Maxwellovy rovnice jsou základními axiomy elektromagnetického pole. Vznikly zobecněním Faradayových experimentů. Důsledky, které z nich plynou, jsou praxí plně potvrzeny.

Maxwellovy rovnice (dále jen MR) lze formulovat v *integrálním tvaru*, anebo v *diferenciálním tvaru*. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté *prostorové oblasti*, kdežto v diferenciálním tvaru v určitém *bodu* této oblasti.

1.6.1. Soustava Maxwellových rovnic v integrálním tvaru

První MR (též *zákon celkového proudu*, anebo *zobecněný Ampèrův zákon*):

$$\oint_c \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}, \text{ kde } \Psi = \int_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{I}$$

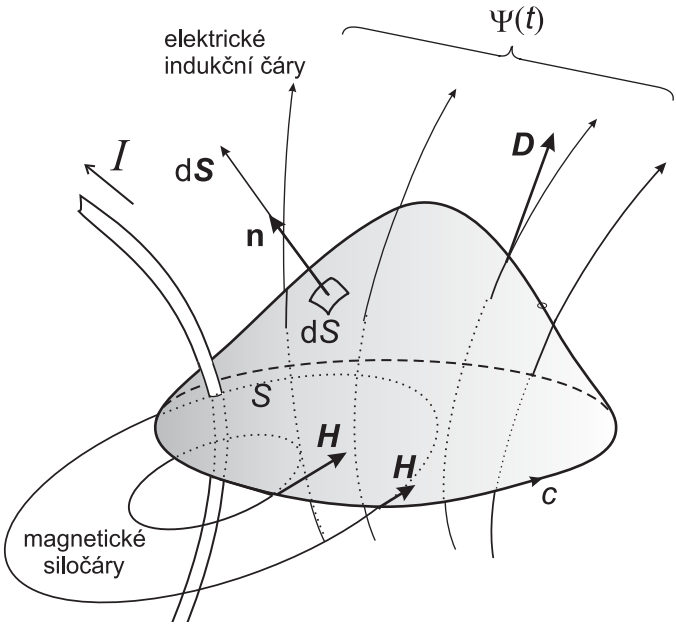
Cirkulace vektoru $\boldsymbol{H}$ po libovolné orientované uzavřené křivce c je rovna součtu celkového vodivého proudu I a posuvného (tzv. Maxwellova) proudu $\frac{d\Psi}{\mathrm{d}t}$. Oba proudy jsou *spřaženy* s křivkou c. Křivka c a libovolná plocha S, kterou křivka c ohraničuje, jsou vzájemně orientovány pravotočivě (obr. 1.4).

Poznámky

1. Výraz $\oint_c \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ se nazývá *oběhové magnetické napětí* v orientované smyčce *c*.

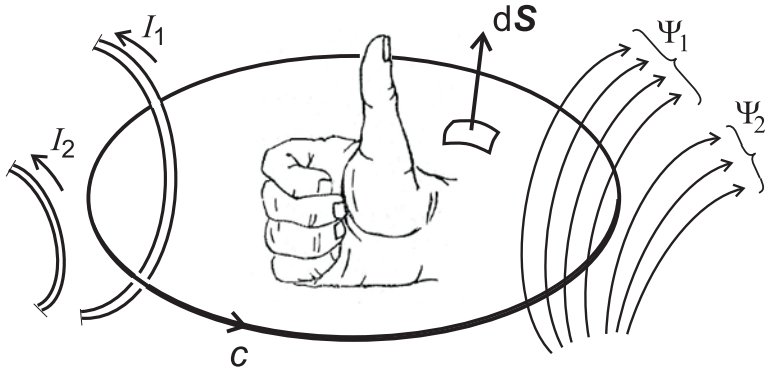
2. Veličinu $\frac{d\Psi}{\mathrm{d}t}$ nazýváme *posuvným* (*Maxwellovým*) *proudem*. Na pravé straně první MR rozumíme proudem *I* a posuvným proudem $\frac{d\Psi}{\mathrm{d}t}$ součet elektrických proudů a součet posuvných proudů, které jsou *spřaženy* s orientovanou smyčkou *c*.

3. Pojem „*proud spřažený s křivkou*“ je patrný z obr. 1.5: proudy I_1 a $\frac{d\Psi_1}{\mathrm{d}t}$ jsou spřažené s křivkou *c*, kdežto proudy I_2 a $\frac{d\Psi_2}{\mathrm{d}t}$ nikoliv. (Proudy „spřažené“ se smyčkou *c* jsou s touto smyčkou spojeny jako dva článku řetězu.)



Obr. 1.4. K první MR v integrálním tvaru.

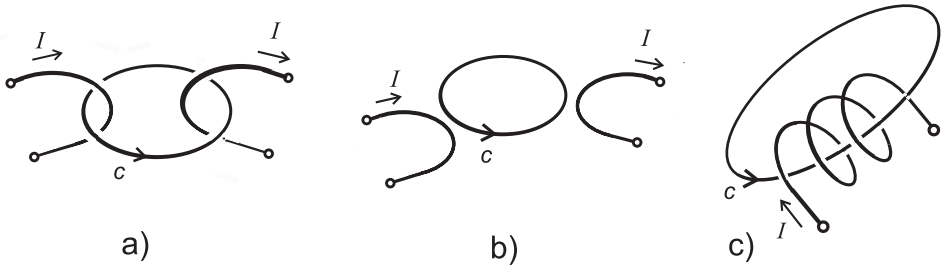
4. Proudy na pravé straně rov. (I) bereme kladně, mají-li směr souhlasný s normálou plochy *S* a záporně v opačném případě. Pravotočivou orientaci názorně vyjadřuje *pravidlo pravé ruky,* které uvádí do souvislosti směr normály plochy *S* (palec) a orientaci křivky *c* (prsty), obr. 1.5. V tomto obrázku vyznačené proudy I_1 a $\frac{d\Psi_1}{\mathrm{d}t}$ bereme jako kladné.



Obr. 1.5. Pravidlo pravé ruky.

Příklad 1.2.

K procvičení pojmu „proud spřažený se smyčkou“ stanovte oběhové magnetické napětí pro tři případy vyznačené na obr. 1.6.



Obr. 1.6. K příkladu 1.2.

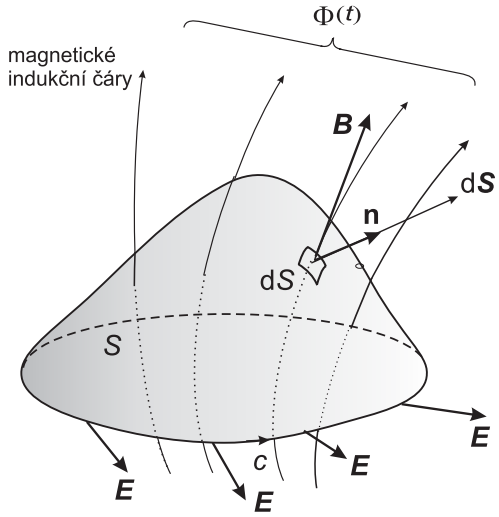
Řešení:

a), b) $\int_c \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$, c) $\int_c \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -3I$.

Druhá MR (též *Faradayův indukční zákon*):

$$\oint_c \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \text{ kde } \Phi = \int_S B\,dS \qquad \text{(II)}$$

Cirkulace vektoru $\boldsymbol{E}$ po libovolné orientované uzavřené křivce c je rovna záporně vzaté derivaci magnetického indukčního toku spřaženého s křivkou c. Křivka c a libovolná plocha S, kterou křivka c ohraničuje, jsou vzájemně orientovány pravotočivě (obr. 1.7)



Obr. 1.7. Ke druhé MR v integrálním tvaru.

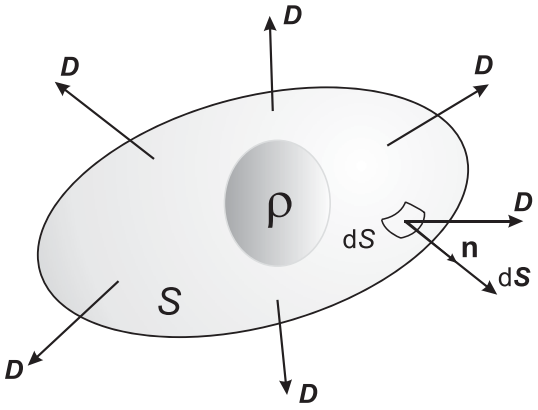
Poznámka

Křivkový integrál $\oint_c \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ se nazývá *indukované napětí ve smyčce c* a označujeme jej u_i.

Třetí MR (též *Gaussova věta*):

$$\oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q\,,\ \text{kde}\ Q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V \qquad \text{(III)}$$

Elektrický indukční tok libovolnou vně orientovanou uzavřenou plochou S je roven celkovému volnému náboji v prostorové oblasti V ohraničené plochou S (obr. 1.8).



Obr. 1.8. Ke třetí MR v integrálním tvaru.

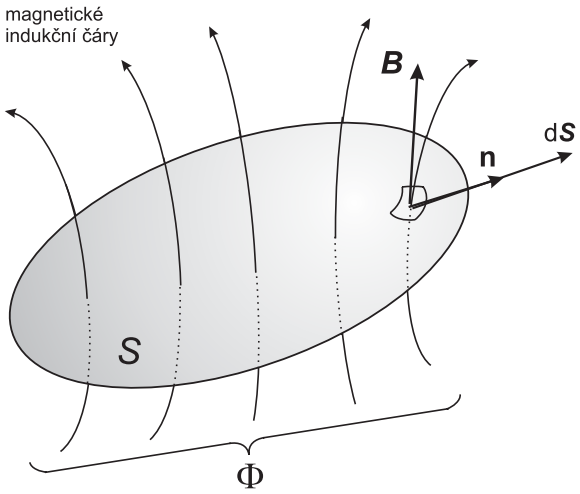
Poznámka

Elektrické pole je *zřídlové*: z kladně nabitých těles vycházejí elektrické indukční čáry a vstupují do záporně nabitých těles. Elektrické indukční čáry jsou tedy neuzavřené.

Čtvrtá MR (též *zákon kontinuity magnetického indukčního toku*):

$$\oint_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Magnetický indukční tok libovolnou uzavřenou orientovanou plochou S je roven nule (obr. 1.9). Jinými slovy: tok, který do uzavřené plochy S vstupuje je roven toku, který z ní vystupuje.



Obr. 1.9. Ke čtvrté MR v integrálním tvaru.

Poznámka

Magnetické pole je *nezřídlové* (*solenoidální*): magnetické indukční čáry jsou uzavřené, neboť neexistuje volný magnetický náboj.

Porovnáním první a druhé MR, rov. (I), (II), se třetí a čtvrtou MR, rov. (III), (IV), je zřejmá jistá symetrie těchto dvojic. Úplná symetrie by nastala, kdyby existoval volný magnetický náboj Q_m (*magnetický monopól*) a tedy při jeho pohybu i „magnetický proud“ $I_\mathrm{m} = \dfrac{\mathrm{d}Q_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$.

1.6.2. Soustava Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru

MR v integrálním tvaru jsou sice názorné, avšak v technických výpočtech je zpravidla výhodnější pracovat s jejich diferenciálním tvarem. MR v diferenciálním tvaru platí pouze v regulárních bodech pole.

První MR:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{(I*)}$$

Rotace vektoru intenzity magnetického pole $\boldsymbol{H}$ je rovna hustotě vodivého proudu $\boldsymbol{J}$ a veličině $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, kterou nazýváme *hustotou posuvného* (*Maxwellova*) *proudu*.

Magnetické pole je obecně *vírové* (*nepotenciální*).

Druhá MR:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(II*)}$$

Rotace vektoru intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ je rovna časové derivaci vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$.

Elektrické pole je obecně *vírové* (*nepotenciální*).

Třetí MR:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{(III*)}$$

Divergence vektoru elektrické indukce $\boldsymbol{D}$ je rovna objemové hustotě volného náboje ρ.

Elektrické pole volných nábojů je *zřídlové*.

Čtvrtá MR:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(IV*)}$$

Divergence vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ je rovna nule.

Magnetické pole je *nezřídlové*, *solenoidální*.

MR v diferenciálním tvaru lze odvodit z integrálního tvaru MR, pomocí známých vět z vektorové analýzy.

Odvození rov. (I*). Předpokládejme oblast, v níž jsou pouze regulární body. Levou stranu rov. (I) upravíme pomocí Stokesovy věty:

$$\oint_c \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

kde S je libovolná plocha ohraničená křivkou c. Na pravé straně rov. (I) vyjádříme vodivý proud I pomocí proudové hustoty $\boldsymbol{J}$, $I = \int_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, a posuvný proud $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$ pomocí hustoty posuvného proudu $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{d\Psi}{dt} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$:

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,, \quad \text{po úpravě:} \int_S \left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

Plošný integrál je roven nule pro libovolnou plochu S, jejímž okrajem je orientovaná uzavřená křivka c, kterou lze v uvažované oblasti libovolně volit. Protože (podle předpokladu) integrand je spojitou funkcí polohy, platí ve všech bodech uvažované oblasti

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{rov. (I*)}.$$

Odvození rov. (II*) je analogické.

Odvození rov. (III*). Předpokládejme oblast, v níž jsou pouze regulární body. Levou stranu rov. (III) upravíme podle Gaussovy-Ostrogradského věty:

$$\oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}V$$

kde V je objem libovolného tělesa a S je jeho povrch. Na pravé straně rov. (III) vyjádříme náboj Q pomocí jeho spojitě rozložené objemové hustoty ρ, $Q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V$. Dostáváme:

$$\int_V (\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} - \rho)\mathrm{d}V = 0$$

Jelikož objemový integrál je roven nule pro libovolnou oblast V, plyne odtud (podle předpokladu), že ve všech bodech uvažované oblasti platí

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} - \rho \Rightarrow \text{rov. (III*)}.$$

Odvození rov. (IV*) je analogické.

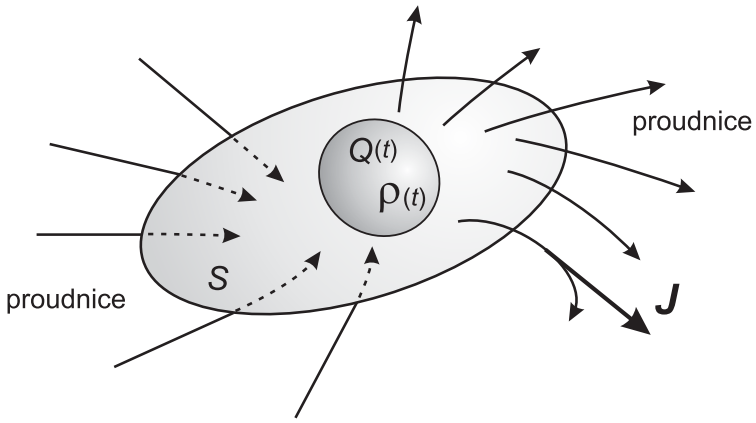
1.6.3. Rovnice pro proudovou hustotu

Pro proudovou hustotu platí vztah, který lze vyjádřit opět v integrálním a v diferenciálním tvaru. Integrální tvar je

$$\oint_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(V)}$$

kde S je libovolná uzavřená plocha ohraničující objem V a $Q(t)$ je náboj uvnitř této plochy. Uzavřenou plochou S proteče ven tolik náboje, kolik ho ubude uvnitř objemu V (obr. 1.10). Diferenciální tvar je

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{(V*)}$$



Obr. 1.10. K rovnici pro proudovou hustotu.

Odvození rov. (V*): Na první MR (I*) provedeme operaci divergence:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{D}$$

Za div $\boldsymbol{D}$ dosadíme z rov. (III*). Jelikož div rot $\boldsymbol{H} = 0$, dostáváme rov. (V*).

Odvození rov. (V) lze provést z rovnice (V*), s použitím Gaussovy-Ostrogradského věty.

Poznámky

Maxwellovy rovnice nejsou na sobě nezávislé, o čemž se snadno přesvědčíme.

1. Z rov. (II*) plyne
   $$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{B} = -\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$$
   a tedy div $\boldsymbol{B}$ = konst. Rov. (IV*) vyjadřuje, že neexistuje magnetický náboj a tedy tato konstanta je vždy nulová.

2. Závislost rovnic (V), (V*) pro proudovou hustotu $\boldsymbol{J}$ na Maxwellových rovnicích plyne z odvození rov. (V*) a z Gaussovy-Ostrogradského věty.

1.6.4. Podmínky na rozhraní

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru platí jen v regulárních bodech. Regulárními nejsou např. body ploch, které oddělují jedno prostředí od druhého a kde dochází ke skokové (nespojité) změně parametrů ε, μ a γ. Stavové vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{J}$ se tam mění nespojitě a MR v diferenciálním tvaru tam neplatí. Elektromagnetické pole tam popíšeme pomocí *podmínek na rozhraní*. Stanovíme tyto podmínky pro různou fyzikální povahu obou prostředí.

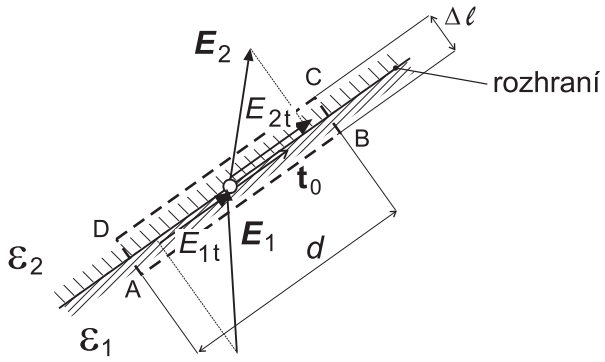
Rozhraní dvou dielektrik o permitivitách ε_1, ε_2

- **Podmínka pro *E*.** Tečná složka vektoru ***E*** se při přechodu rozhraním mění spojitě (obr. 1.11):

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{VI}$$

čili

$$\mathbf{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \tag{VIa}$$



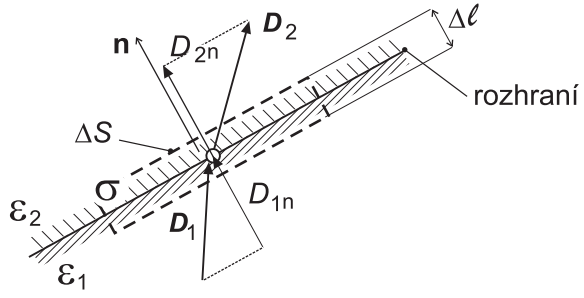
*Obr. 1.11. Vektor **E** na rozhraní dvou dielektrik.*

- **Podmínka pro *D*.** Na rozhraní nechť je rozložen náboj o plošné hustotě σ. Normálové složky vektoru ***D*** se na rozhraní mění nespojitě; velikost této nespojitosti je dána velikostí náboje o plošné hustotě σ (obr. 1.12):

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{VII}$$

čili

$$\mathbf{n}\,(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma \tag{VIIa}$$



*Obr. 1.12. Vektor **D** na rozhraní dvou dielektrik.*

Odvození rov. (VI). V libovolném bodu rozhraní sestrojíme tečnu *t* s jednotkovým vektorem $\mathbf{t}_0$ a tečné složky vektorů $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ (obr. 1.11). Rozhraní nahradíme přechodovou tenkou vrstvou tloušťky Δl, v níž se permitivita mění *spojitě* z hodnoty ε_1 na hodnotu ε_2 a tedy stavový vektor ***E*** a jeho první derivace se tam mění spojitě. Sestrojíme dostatečně malý orientovaný obdélník A–B–C–D, jehož strany A–B a C–D leží v různých prostředích a jsou rovnoběžné s rozhraním. Použijeme rov. (II), v níž orientovanou smyčkou *c* je náš obdélník. Jsou-li rozměry A–B = C–D = *d* a B–C = D–A = Δl

dostatečně malé, lze předpokládat, že vektory $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ jsou na délce d konstantní a vektor $\boldsymbol{B}$ je v rovině ohraničené obdélníkem konstantní. Pak

$$\oint_c \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_{1\mathrm{t}}\,\Delta l\,\mathbf{t}_0 - \boldsymbol{E}_{2\mathrm{t}}\,\Delta l\,\mathbf{t}_0 \;+\; \text{příspěvek po drahách B–C a D–A} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,\mathbf{n}\,d\,\Delta l$$

kde $E_{1\mathrm{t}} = \boldsymbol{E}_1\,\mathbf{t}_0$, $E_{2\mathrm{t}} = \boldsymbol{E}_2\,\mathbf{t}_0$. Jestliže $\Delta l \longrightarrow 0$, jsou oba příspěvky zanedbatelné a jelikož $\mathbf{t}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{n}$, dostáváme rov. (VI) a (VIa).

Odvození rov. (VII). V libovolném bodu rozhraní zavedeme jednotkovou normálu **n** a normálové složky vektorů $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ (obr. 1.12). Stejně jako při odvození rov. (VI) zavedeme přechodovou vrstvu. Vložíme do ní kvádřík tak, aby jeho osa ležela v normále **n** a podstavy o ploše ΔS ležely v různých prostředích. Použijeme rov. (III) a integrujeme přes povrch kvádříku. Je-li plocha ΔS malá, jsou vektory $\boldsymbol{D}_1$ a $\boldsymbol{D}_2$ jsou na ploše ΔS konstantní. Dostáváme:

$$\oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{2\mathrm{n}}\,\Delta S \;-\; D_{1\mathrm{n}}\,\Delta S \;+\; \text{elektrický tok pláštěm kvádříku} = \sigma\,\Delta S$$

Jestliže $\Delta l \longrightarrow 0$, je tok pláštěm zanedbatelný a dostáváme rov. (VII) a (VIIa).

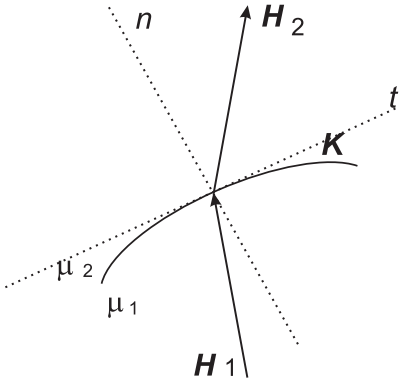
Rozhraní dvou magnetik o permeabilitách μ_1, μ_2

- **Podmínka pro *H*.** Nechť (pro větší obecnost) rozhraním protéká v tenké vrstvičce proud o plošné hustotě ***K***. Tečné složky vektoru ***H*** se na rozhraní mění nespojitě; velikost nespojitosti K_n je normálovou složkou (tj. složkou kolmou k nákresně) vektoru ***K*** (obr. 1.13):

$$H_{2\mathrm{t}} - H_{1\mathrm{t}} = K_\mathrm{n} \qquad \text{(VIII)}$$

čili

$$\mathbf{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K} \qquad \text{(VIIIa)}$$



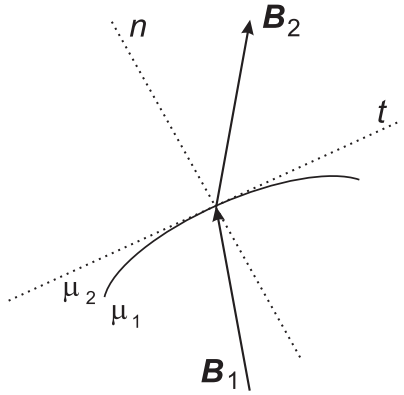
*Obr. 1.13. Vektor **H** na rozhraní dvou magnetik.*

- **Podmínka pro *B*.** Pro normálové složky vektoru ***B*** na rozhraní platí (obr. 1.14):

$$B_{1\mathrm{n}} - B_{2\mathrm{n}} = 0 \qquad \text{(IX)}$$

čili

$$\mathbf{n}\,(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \qquad \text{(IXa)}$$



*Obr. 1.14. Vektor **B** na rozhraní dvou magnetik.*

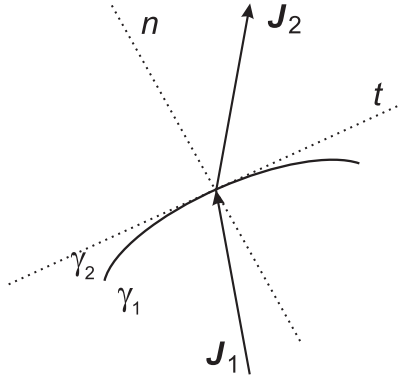
Odvození rov. (VIII) je analogické jako u rov. (VI); vychází se z rovnice (I).

Odvození rov. (IX) je analogické jako u rov. (VII); vychází se z rovnice (I).

Rozhraní dvou vodivých prostředí o konduktivitách γ_1, γ_2

- **Podmínka pro *E***. V proudovém poli platí opět rov. (VI), (VIa).
- **Podmínka pro *J***. Pro normálové složky vektoru ***J*** na rozhraní platí (obr. 1.15):

$$J_{1n} - J_{2n} = 0 \qquad \text{(X)}$$



*Obr. 1.15. Vektor **J** na rozhraní dvou vodivých prostředí.*

Odvození rov. (X) je analogické jako u rov. (VII). Vychází se z rov. (V*).

Zákon lomu

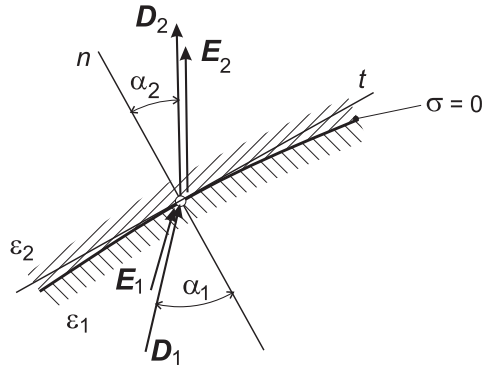
Pro elektrické a magnetické siločáry (resp. elektrické proudnice) platí (obr. 1.16):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad , \qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad , \qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \qquad \text{(XI)}$$

Odvození první z rov. (XI): podle rovnic (VI) a (VII) platí pro rozhraní bez náboje ($\sigma = 0$):

$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \quad \text{a} \quad \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 ,$$

odkud plyne dokazovaná rovnice. Zbývající dvě rovnice (XI) se odvodí analogicky.



Obr. 1.16. K zákonu lomu na rozhraní dvou dielektrik.

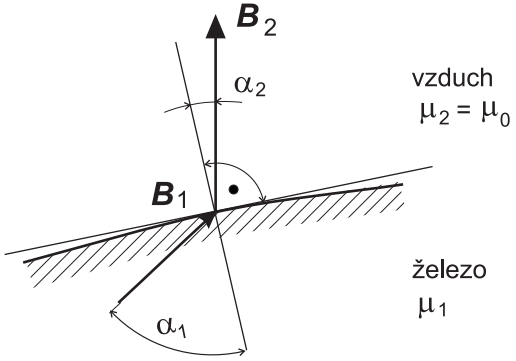
Příklad 1.3.

Dokažte, že na rozhraní feromagnetikum-vzduch magnetické indukční čáry vystupující (vstupující) do vzduchu jsou prakticky kolmé k rozhraní (obr. 1.17). Číselně řešte pro $\mu_1 = 200\,\mu_0$ (železo), $\mu_2 = \mu_0$ (vzduch), $\alpha_1 = 85°$.

Řešení:

Jelikož $\mu_2 << \mu_1$, je podle rov. (XI): $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\operatorname{tg}\alpha_1 \approx 0$, tedy $\alpha_2 \approx 0$.

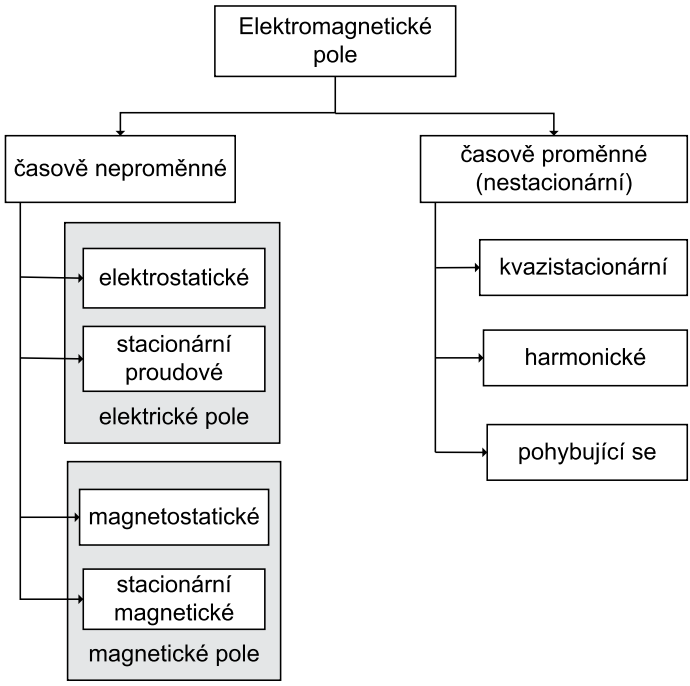
Číselně: $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\operatorname{tg}\alpha_1\right] = 3°10'$.



Obr. 1.17. Magnetické indukční čáry na rozhraní železo–vzduch.

1.7. Klasifikace elektromagnetického pole

Podle časového průběhu rozlišujeme (obr. 1.18):



Obr. 1.18. Různé formy elektromagnetického pole podle jeho závislosti na čase.

- *Pole časově neproměnné*. Jsou-li náboje v klidu, hovoříme o poli *statickém*, jsou-li v rovnoměrném pohybu (tj. tvoří-li elektrický proud), jde o pole *stacionární*.

Nejprve se budeme zabývat elektromagnetickým polem, které se s časem nemění a teprve poté polem časově proměnným (nestacionárním). Z dalšího výkladu bude patrno, že u časově neproměnného elektromagnetického pole lze vyšetřovat *odděleně* elektrické pole a poté magnetické pole. Naproti tomu u časově proměnného pole je nutno zkoumat obě tato pole *současně*, tj. je nutno se zabývat polem elektromagnetickým.

U časově neproměnného pole se setkáváme s těmito případy:

– *elektrostatické pole* [2] – elektrické pole nepohybujících se nábojů v dielektriku,

– *proudové pole* – pole stacionárního elektrického proudu ve vodivém prostředí,

– *magnetické pole* – pole indukované stacionárním elektrickým proudem; speciálně v oblasti, v níž je magnetické pole potenciální, mluvíme o *magnetostatickém poli* (např. magnetické pole permanentních magnetů).

2) *Statické pole* (elektrostatické, magnetostatické) existuje jen ve svém makroskopickém projevu a nikoliv ve své fyzikální podstatě. V mikrostruktuře elektrických nábojů a v mikrostruktuře permanentních magnetů jsou vždy pohybující se elementární částice, jež mají své elektrické a magnetické pole.

■ *Pole časově proměnné* čili *nestacionární*. U nestacionárního pole pojednáme též o jeho speciálních případech, které mají význam v inženýrských aplikacích. Jedná se o:

– *Pole kvazistacionární* (pole pomalu proměnné), tj. pole u něhož je posuvný proud zanedbatelný vůči proudu vodivému, $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} << I$, resp. $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} << \boldsymbol{J}$.

– *Pole periodicky proměnné* (říkáme, že pole je *v ustáleném stavu*); častým speciálním případem je *pole harmonické*, tj. pole, které se s časem mění podle sinové nebo kosinové funkce. Přechází-li z jednoho ustáleného stavu do druhého, jde o jeho *neustálený* (*přechodný*) *stav*. Tento případ nastane např. tehdy, když zdroje pole změní své parametry, anebo svou polohu v prostoru.

– *Pole točivé* a *pole posuvné*.

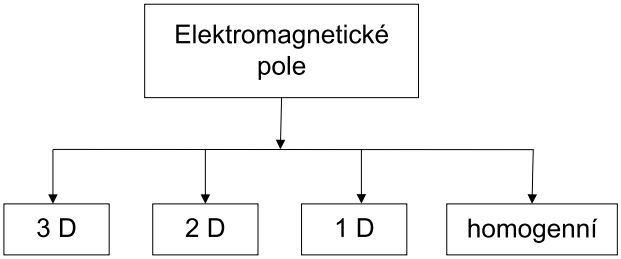
Podle rozložení v prostoru rozlišujeme *prostorovost* (*dimenzi*) pole (obr. 1.19). Veličiny, které pole popisují, jsou obecně funkcemi času a tří geometrických souřadnic, např. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(t,x,y,z)$. Dimenze pole je dána minimálním počtem souřadnic, jejichž prostřednictvím lze pole popsat. Mohou nastat tyto případy:

– *Pole trojrozměrné (trojdimenzionální, prostorové)*, jestliže veličiny charakterizující pole jsou funkcemi tří geometrických souřadnic. Označení: 3D pole.

– *Pole dvojrozměrné (dvojdimenzionální)*, jestliže veličiny pole jsou funkcemi dvou geometrických souřadnic. Dvojrozměrným je např. pole *rovinné* (je funkcí souřadnic *x, y*), nebo pole *rotačně symetrické* (je funkcí souřadnic *r, z*). Označení: 2D pole.

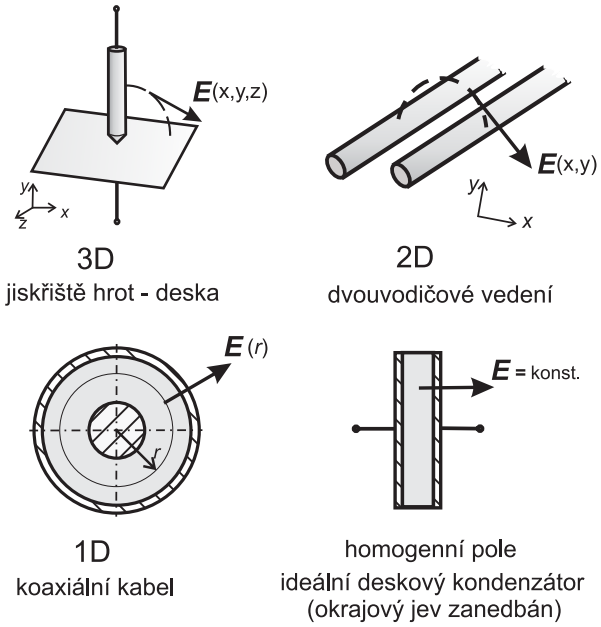
– *Pole jednorozměrné (jednodimenzionální)*, jestliže veličiny pole jsou funkcí jedné geometrické souřadnice (např. *x* nebo *r*). Označení: 1D pole.

– *Pole homogenní*, jestliže je nezávislé na geometrických souřadnicích.



Obr. 1.19. Dimenze elektromagnetického pole.

Na obr. 1.20 jsou znázorněny čtyři příklady elektrostatického pole a to pole 3D, 2D, 1D a pole homogenního.



Obr. 1.20. Příklady 3D, 2D, 1D a homogenního elektrostatického pole.

V dalším se zaměříme především na dvě oblasti:

1. Na poznání *zákonů*, jimiž se řídí elektromagnetické jevy. Při tom budeme mít na zřeteli jejich hierarchickou výstavbu: vyjdeme z MR a budeme z nich odvozovat další zákony a rovnice, které platí pro speciální případy elektromagnetického pole a které používáme při řešení inženýrských problémů.
2. Na studium základních *metod*, které vycházejí ze zákonů teorie elektromagnetického pole a umožňují řešit technické problémy.

1.8. Příklady

Příklad 1.4.

Určete náboj, který projde průřezem vodiče v časovém intervalu $t \in <4.\ 10>$ s, prochází-li jím proud, který je

a) $I = 4$ A (= konst.), b) lineárně rostoucí z $I(0) = 0$ na $I(10) = 4$ A.

Řešení:

a) $$Q = I\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = 4(t_1 - t_2) = 4(10-4) = 24 \text{ C}$$

b) $$Q = 0{,}4\int_{t_1}^{t_2} t\,\mathrm{d}t = 0{,}2(t_2^2 - t_1^2) = 0{,}2(10^2 - 4^2) = 16{,}8 \text{ C}$$

Příklad 1.5.

Dokažte, že rovnice elektrické siločáry, která prochází bodem $[x, y, z]$, má tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z} \qquad (*)$$

kde E_x, E_y, E_z jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{E}$.

Řešení:

Budiž $\boldsymbol{r}$ radiusvektor bodu $[x, y, z]$. Pak $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = k\,\boldsymbol{E}$, kde k je konstanta, čili $\mathbf{i}\,\mathrm{d}x + \mathbf{j}\,\mathrm{d}y + \mathbf{k}\,\mathrm{d}z = k\,(\mathbf{i}\,E_x + \mathbf{j}\,E_y + \mathbf{k}\,E_z)$. Odtud rov. (*).

Příklad 1.6.

Určete, zda pole vektoru $\boldsymbol{C}$ je zřídlové či nezřídlové (čili solenoidální), vírové či nevírové (čili potenciální), jestliže a) $\boldsymbol{C} = \mathbf{i}\,k$ (k je konstanta), b) $\boldsymbol{C} = \mathbf{i}\,y - \mathbf{j}\,x$, c) $\boldsymbol{C} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y$.

Výsledek:

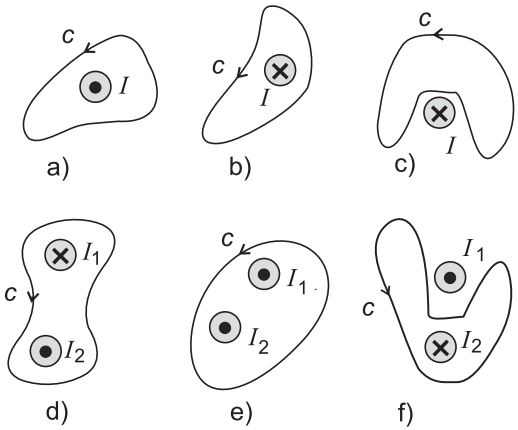
a) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{C} = 0 \Rightarrow$ nezřídlové, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{C} = 0 \Rightarrow$ nevírové (pole je homogenní),

b) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{C} = 0 \Rightarrow$ nezřídlové, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{C} = -2\mathbf{k} \Rightarrow$ vírové,

c) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{C} = 2 \Rightarrow$ zřídlové, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{C} = 0 \Rightarrow$ nevírové.

Příklad 1.7.

Určete oběhové magnetické napětí po orientované křivce c pro případy vyznačené na obr. 1.21.



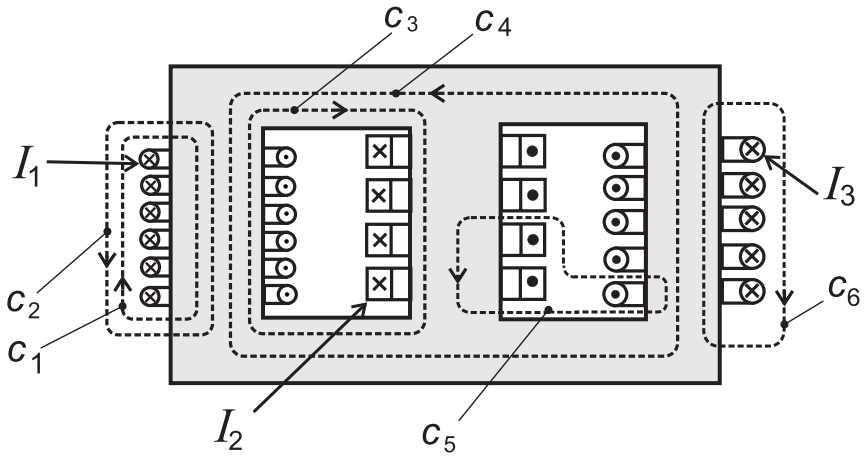
Obr. 1.21. K příkladu.

Řešení:

a) I, b) $-I$, c) 0, d) $-I_1 + I_2$, e) $I_1 + I_2$, f) $-I_2$.

Příklad 1.8.

Na železném jádře jsou tři cívky s počty závitů: $N_1 = 6$ závitů, $N_2 = 4$ závity, $N_3 = 5$ závitů, s proudy $I_1 = 1{,}5$ A, $I_2 = 20$ A, $I_3 = 0{,}5$ A, obr. 1.22. Stanovte:



Obr. 1.22. K příkladu.

a) oběhové magnetické napětí po vyznačených orientovaných smyčkách c_1 až c_6,

b) Jak se změní tato oběhová magnetická napětí, je–li jádro z nemagnetického materiálu?

Řešení:

a) $\oint_{c_1} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = N_1 I_1 = 9$ A, $\quad \oint_{c_2} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = N_1 (-I_1) = -9$ A,

$\oint_{c_3} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = N_1(-I_1) + N_2 I_2 = 71$ A, $\quad \oint_{c_4} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = N_1 I_1 + N_3 I_3 = 11{,}5$ A,

$\oint_{c_5} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2 I_2 + I_3 = 40{,}5$ A, $\quad \oint_{c_6} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = N_3 I_3 = 2{,}5$ A

b) Oběhové magnetické napětí nezávisí na permeabilitě jádra.

Přeložil jsem to, co jsem považoval za Faradayovy myšlenky,
do matematického tvaru.
James Clerk Maxwell
v předmluvě svého díla
A Treatise on Electricity and Magnetism z r. 1873

2. Základní vlastnosti časově neproměnného elektrického a magnetického pole

V této kapitole uvedeme rovnice pro základní formy elektromagnetického pole, a sice pro pole elektrostatické, stacionární proudové a stacionární magnetické. Dále ukážeme, že elektrické a magnetické pole lze popsat nejen stavovými vektory, ale též pomocí potenciálů, což se později ukáže jako velmi užitečné. Posléze navážeme na představy o stavbě hmoty, které čtenář získal při studiu fyziky a pojednáme o matematicko-fyzikálních vlastnostech těchto polí při interakci s různými látkami.

2.1. Elektrostatické pole

Zdrojem elektrostatického pole jsou elektrické náboje, které se nepohybují (tj. nedochází k elektrickému proudu) a tedy nevzniká magnetické pole.

2.1.1. Rovnice elektrostatického pole

Maxwellovy rovnice nabývají pro elektrostatické pole tento tvar:

	Integrální tvar	Diferenciální tvar
Druhá MR	$\oint_c \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$
Třetí MR	$\oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$	$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$
		$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\boldsymbol{E}$

Druhá MR pro elektrostatické pole vyjadřuje, že *oběhové elektrické napětí v elektrostatickém poli* je nulové. Z vektorové analýzy je známo, že to je nutná a postačující podmínka, aby hodnota elektrického napětí, podle rov. (1.13),

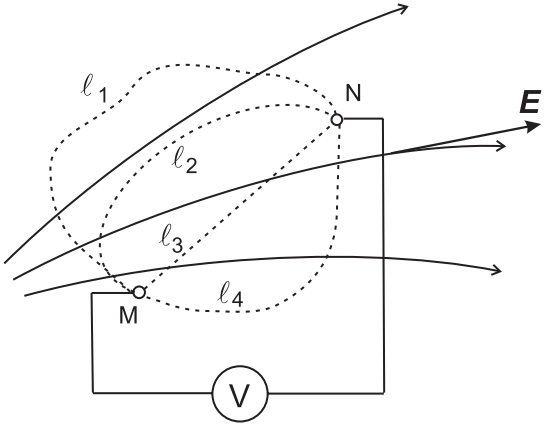
$$U_{\mathrm{MN}} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.13}$$

byla nezávislá na tvaru integrační dráhy z bodu M do bodu N.

Toto tvrzení ilustruje obr. 2.1, kde hodnoty jednotlivých křivkových integrálů jsou stejné:

$$U_{\mathrm{MN}} = \int_{\mathrm{M}(l_1)}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{M}(l_2)}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{M}(l_3)}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{M}(l_4)}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Protože $\boldsymbol{E}$ je síla působící na jednotkový bodový náboj, lze výraz pro U_{MN} fyzikálně interpretovat jako práci vykonanou v elektrickém poli $\boldsymbol{E}$ při přemístění kladného jednotkového bodového náboje (Q = 1C) z bodu M do bodu N.



Obr. 2.1. Napětí v elektrostatickém poli.

Příklad 2.1.

Určete hodnotu křivkového integrálu v rov. (1.13), jestliže $\boldsymbol{E} = \mathbf{j}\ 100$ [V/m], M(0,0), N(1,1) a integrační dráha l je: a) přímka $y = x$, b) parabola $y = x^2$.

Řešení:

$$U_{\mathrm{MN}} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{l} \left(E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y\right); \quad \text{a)} \int_0^1 100\,\mathrm{d}y = 100, \quad \text{b)} \int_0^1 100.2\,x\,\mathrm{d}x = 100$$

Definice a vlastnosti elektrického potenciálu

Ačkoliv druhá a třetí MR jsou formálně velmi jednoduché, lze nalézt jejich *přímé* řešení (tj. určení stavových vektorů $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$) jen pro několik speciálních případů, které probereme v následující kapitole. Nejpoužívanějším způsobem je jejich *nepřímé* řešení*:* zavedeme skalární veličinu, kterou nazveme *elektrický potenciál*. Sestavíme matematický model elektrického pole, který vychází z MR, ale neznámými veličinami již nejsou stavové

vektory, ale elektrický potenciál. Tento model je analyticky i numericky celkem dobře řešitelný; lze z něho určit potenciál a z toho pak stavové vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ elektrického pole.

■ *Definice skalárního elektrického potenciálu*. Elektrický potenciál označme φ. Je definován vztahem

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{2.1}$$

kde potenciál $\varphi(x,y,z)$ je skalární spojitou funkcí polohy. Její jednotkou je volt [V].

■ *Motivace definice potenciálu*

Podle druhé MR platí pro časově neproměnné elektrické pole

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0. \tag{*}$$

Z vektorové analýzy je známo, že pro spojitou funkci polohy φ platí

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0. \tag{**}$$

Z rovnic (*) a (**) plyne, že $\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\varphi$. Vysvětlení znaménka „minus“ v rov. (2.1). Gradient funkce φ je vektor, jehož směr udává největší růst funkce φ. Z fyzikálních (a také tradičních) důvodů však požadujeme, aby vektor $\boldsymbol{E}$ směřoval od místa s vyšším potenciálem φ k místu s nižším potenciálem φ ; požadujeme tedy, aby měl směr zmenšujícího se φ . Toho docílíme znaménkem „minus“.

■ *Jednoznačnost elektrického potenciálu*. Elektrický potenciál je definován rovnicí (2.1) jednoznačně až na aditivní konstantu, neboť zřejmě platí

$\operatorname{grad}(\varphi + k) = \operatorname{grad}\varphi$, k je libovolná konstanta

Je-li třeba zavést potenciál φ jednoznačně, provádíme jeho *normování*: v libovolném bodu elektrostatického pole zvolíme hodnotu potenciálu φ a ve všech ostatních bodech pole je pak potenciál již určen jednoznačně. Například často normujeme potenciál, kladouce $\varphi(\infty) = 0$, nebo klademe potenciál země roven nule, ale používáme i jiné normování.

■ *Fyzikální interpretace elektrického potenciálu*. Pro napětí mezi body M a N v elektrostatickém poli platí podle rovnic (1.13) a (2.1):

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{MN}} &= \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \operatorname{grad}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \\ &= \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{i}\,\mathrm{d}x + \mathbf{j}\,\mathrm{d}y + \mathbf{k}\,\mathrm{d}z\right) \\ &= \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}z\right) = -\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \mathrm{d}\varphi = \varphi(\mathrm{M}) - \varphi(\mathrm{N}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

tj. *napětí mezi body* M *a* N *je dáno rozdílem potenciálů těchto bodů*.

Práce vykonaná (získaná) přenesením bodového náboje Q z bodu M do bodu N je

$$A = Q\left[\varphi(\mathrm{M}) - \varphi(\mathrm{N})\right] = QU_{\mathrm{MN}} \tag{2.3}$$

čili, napětí mezi body M a N je rovno práci, vykonanou (získanou) přenesením jednotkového bodového náboje mezi těmito body.

- *Spojitost elektrického potenciálu*. Potenciál φ je spojitou funkcí polohy. Pro regulární body to plyne z definice (2.1), pro neregulární body (např. pro rozhraní mezi různými dielektriky) z podmínek na rozhraní.

- *Ekvipotenciály elektrického potenciálu φ a jejich vztah k siločarám elektrického pole*. Množinu bodů, které mají týž elektrický potenciál, nazýváme *elektrickou ekvipotenciálou*, resp. *elektrickou ekvipotenciální plochou* v 3D poli a *ekvipotenciální křivkou* ve 2D poli.

  Rovnice ekvipotenciály je

  $$\varphi = \text{konst.}, \text{ čili } \mathrm{d}\varphi = 0 \tag{2.4}$$

  Siločáry elektrostatického pole jsou ortogonální k jeho ekvipotenciálám (obr. 2.2).

  Důkaz. Leží-li body M a N na ekvipotenciále, je $\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{N})$ a práce potřebná k přemístění náboje Q z bodu M do bodu N je

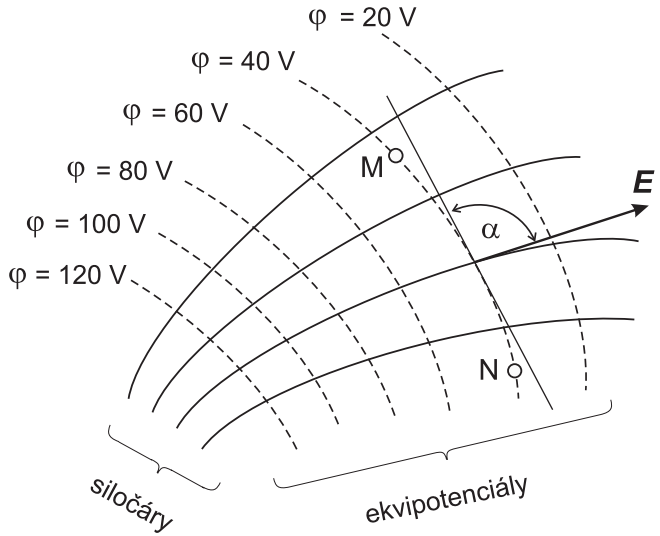
  $$A = Q\left[\varphi(\mathrm{M}) - \varphi(\mathrm{N})\right] = 0.$$

  Zároveň platí

  $$A = Q\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = Q\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} E\cos\alpha\,\mathrm{d}l,$$

  kde α je úhel mezi $\boldsymbol{E}$ a tečnou k ekvipotenciále. Z obou rovnic je patrno, že $\cos\alpha = 0$, čili $\alpha = 90^{\circ}$.

Pomocí soustavy ekvipotenciál geometricky zobrazujeme elektrostatické pole.



Obr. 2.2. Siločáry a ekvipotenciály elektrostatického pole.

■ *Rovnice pro elektrický potenciál*. Výhoda zavedení elektrického potenciálu je zřejmá: *vektorové* pole ***E*** nahradíme *skalárním* (tedy jednoduším) polem φ. Druhá a třetí MR pro elektrostatiku jsou sice formálně velmi jednoduché, avšak lze je jednoduše *přímo* řešit (tj. určit vektory ***E, D***) jen v jednoduchých 1D případech. Nejrozšířenější způsob řešení elektrostatického pole je založen na zavedení potenciálu. Ze třetí MR odvodíme rovnici pro φ, vyřešíme ji (tj. určíme φ) a z definičního vztahu (2.1) pak určíme ***E***.

V regulárních bodech lineárního, homogenního, izotropního dielektrika platí pro potenciál parciální diferenciální rovnice eliptického typu, kterou nazýváme *Poissonovou rovnicí:*

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

kde Δ je tzv. *Laplaceův symbol*: $\Delta\varphi = \text{div grad}\,\varphi$.

V místech, kde není elektrický náboj ($\rho = 0$), dostáváme pro potenciál *Laplaceovu rovnici*:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.6}$$

Odvození rov. (2.5). Do třetí MR dosadíme za ***D*** z rov. (1.9) a za ***E*** z rov. (2.1):

$\text{div}\,\boldsymbol{D} = \text{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E} = \text{div}\,\varepsilon(-\text{grad}\,\varphi) = \rho$

Pro lineární prostředí je ε = konst. a dostáváme

$\text{div grad}\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, cbd.

Pro větší názornost rozepíšeme symbolický zápis rovnice (2.5) a také rovnici (2.1) pro pravoúhlý a pro válcový souřadnicový systém.

a) *V pravoúhlých souřadnicích* (*x,y,z*) má Poissonova rov. (2.5) tvar

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

a rov. (2.1) lze zapsat ve tvaru

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{2.8}$$

b) *Ve válcových souřadnicích* (*r,a,z*) má Poissonova rov. (2.5) tvar

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.9}$$

a z rov. (2.1) plyne

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{2.10}$$

■ *Potenciál na rozhraní mezi dvěma dielektriky.* Body ležící na rozhraní mezi dvěma dielektriky nejsou regulární a neplatí v nich MR v diferenciálním tvaru a tedy ani Poissonova, resp. Laplaceova rovnice, rov. (2.5), resp. (2.6). Je třeba vycházet z podmínek na rozhraní pro stavové vektory ***E*** a ***D*** a vyjádřit je pomocí potenciálu φ.

Na rozhraní mezi dvěma dielektriky o permitivitách ε_1, ε_2 platí:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \tag{2.11}$$

tj. potenciál je i na rozhraní spojitý. Dále platí (pro $\sigma = 0$):

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \tag{2.12}$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ je derivace ve směru normály k rozhraní, orientované z dielektrika 1 do dielektrika 2.

Důkaz plyne z rov. (VI) a (VII), s použitím rov. (2.1) a (1.9).

Princip superpozice elektrických polí

Princip superpozice je významnou vlastností všech *lineárních* fyzikálních systémů. Vyjadřuje, že závislost mezi podněty a odezvami na tyto podněty je lineární. Lze dokázat (viz např. [62]) následující matematickou větu. *Nechť v lineárním prostředí působí několik nezávislých zdrojů. Odezvu těchto zdrojů lze určit jako součet odpovídajících odezev pro jednotlivé zdroje.* V elektrostatickém poli jsou zdroji elektrické náboje a odezvami jsou veličiny charakterizující jejich elektrostatické pole.

Nechť například v lineárním dielektriku (ε = konst.) působí náboj Q, tvořený soustavou nábojů Q_1,..., Q_n

$$Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n \tag{2.13}$$

Tento náboj Q indukuje elektrostatické pole o intenzitě

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + ... + \boldsymbol{E}_n \tag{2.14}$$

a o potenciálu

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n \tag{2.15}$$

kde $\boldsymbol{E}_i$, φ_i jsou intenzity a potenciály, které indukují náboje Q_i (i = 1, ..., n).

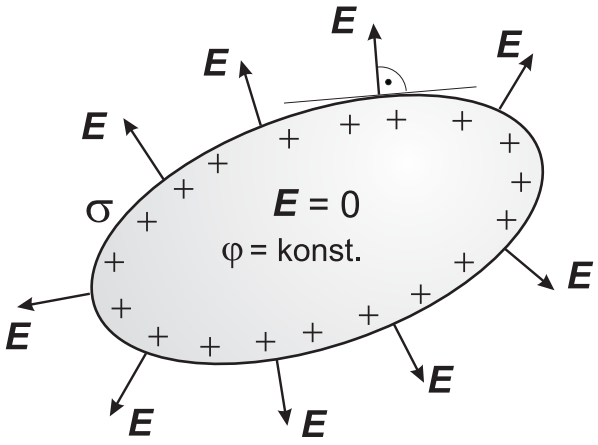
Použití principu superpozice. Při řešení elektrických polí indukovaných větším počtem nábojů postupujeme tak, že postupně vyřešíme pole, které indukují jednotlivé náboje a výsledky sečteme (superponujeme).

V *nelineárním dielektriku* (tj. v prostředí, kde $\varepsilon \neq$ konst.) *princip superpozice neplatí*.

2.1.2. Vodič v elektrostatickém poli, elektrostatická indukce

Vodič vložený do elektrostatického pole vykazuje tyto vlastnosti:

- *Přivedeme-li na vodič volný elektrický náboj Q, rozloží se na jeho povrchu s povrchovou hustotou σ. Vnitřek vodiče je bez (makroskopického) náboje* (obr. 2.3).



Obr. 2.3. Rozložení náboje na povrchu vodiče.

Fyzikálně lze tento jev vysvětlit tak, že elementární náboje (elektrony), které vytvářejí náboj Q, jsou stejné polarity, odpuzují se a proto se přesunou tak, aby vzdálenost mezi nimi byla do největší.

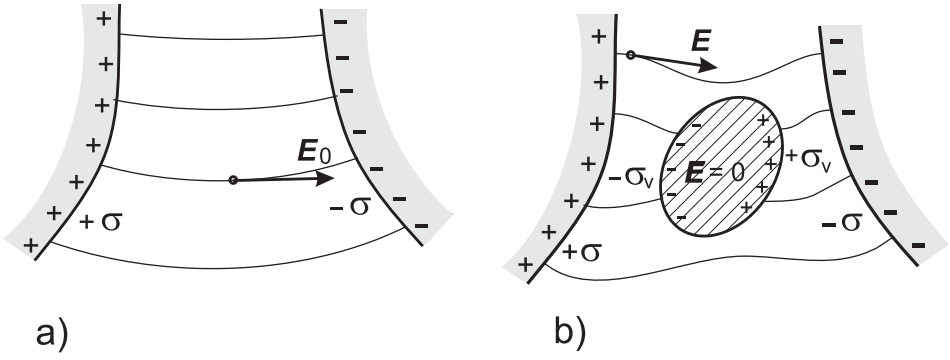
Důkaz (sporem). Kdyby bylo uvnitř vodiče $\boldsymbol{E} \neq 0$, působila by na náboj Q síla $\boldsymbol{F} = Q\,\boldsymbol{E}$, docházelo by k jeho pohybu (tedy k elektrickému proudu), což odporuje předpokladu elektrostatického pole.

Že se veškerý náboj Q rozloží pouze na povrchu vodiče plyne ze třetí MR: jelikož uvnitř vodiče je $\boldsymbol{E} = 0$, je

$$\oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \;=\; \varepsilon \oint_S \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \;=\; 0 \;\Rightarrow\; Q = 0$$

kde uzavřená plocha S může být uvnitř vodiče jakákoliv, avšak nesmí obsahovat jeho povrch.

■ *Vložíme-li vodič do elektrostatického pole $\boldsymbol{E}_0$, vzniknou na protilehlých částech jeho povrchu povrchové volné náboje $\pm\sigma_v$, přičemž uvnitř vodiče je $\boldsymbol{E} = 0$* (obr. 2.4).



Obr. 2.4. K elektrostatické indukci.

Tento jev nazýváme *elektrostatickou indukcí.*

Vysvětlení. Volné elektrony uvnitř vodiče vytváří (své) elektrické pole $\boldsymbol{E}_v$. Celkové pole uvnitř i vně vodiče je tedy $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{E}_v$. Uvnitř vodiče působí toto pole na volné elektrony, které se posouvají tak dlouho, až se obě pole vykompenzují, tedy až $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{E}_v = 0$. Tento proces proběhne ve velmi krátkém čase.

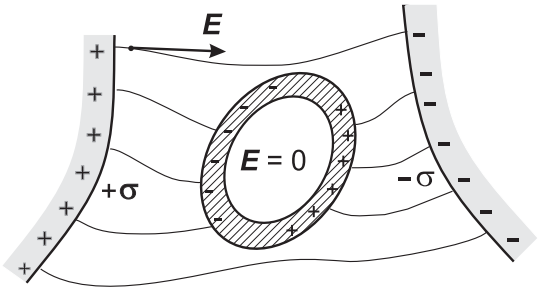
■ *Vložíme-li vodič do elektrostatického pole $\boldsymbol{E}_0$,* dochází v okolí vodiče k deformaci původního pole $\boldsymbol{E}_0$ (obr. 2.4)

Vysvětlení vyplývá z předchozího: vně vodiče působí pole $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{E}_v \neq 0$, obě složky se nevykompenzují.

Čtenář si snadno zdůvodní (pomocí třetí MR) následující dvě tvrzení.

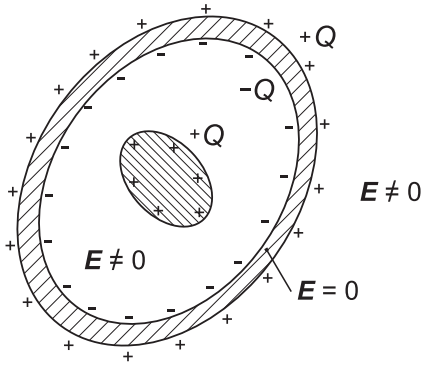
■ *Vložíme-li dutý vodič do elektrostatického pole, je uvnitř dutiny $\boldsymbol{E} = 0$ a na vnější části povrchu vzniknou volné povrchové náboje $\pm\sigma$* (vnitřní povrch dutiny je bez nábojů), obr. 2.5.

Tohoto jevu se využívá v měřící a sdělovací technice při potlačení (stínění) rušivého působení elektrostatického pole (podrobněji viz kapitolu 13.4.1.).



Obr. 2.5. Stínění elektrostatického pole.

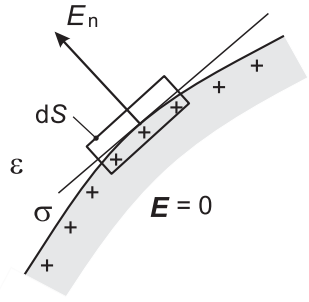
■ *Vložíme-li do dutiny ve vodiči volný náboj Q, pak vodič nestíní před elektrostatickým polem náboje.* Elektrostatickou indukcí vznikne na vnitřním povrchu dutiny volný povrchový náboj o celkové hodnotě – *Q* a na vnějším povrchu vodiče volný povrchový náboj o celkové hodnotě + *Q* (obr. 2.6)



Obr. 2.6. Náboj v dutině vodiče.

Coulombova věta. *Vodič, na jehož povrchu je náboj o hustotě σ, je v prostředí o permitivitě ε* (obr. 2.7). *Na povrchu vodiče je pak intenzita elektrického pole*

$$\boldsymbol{E} = \mathbf{n} E_{\mathrm{n}} = \mathbf{n} \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{2.16}$$



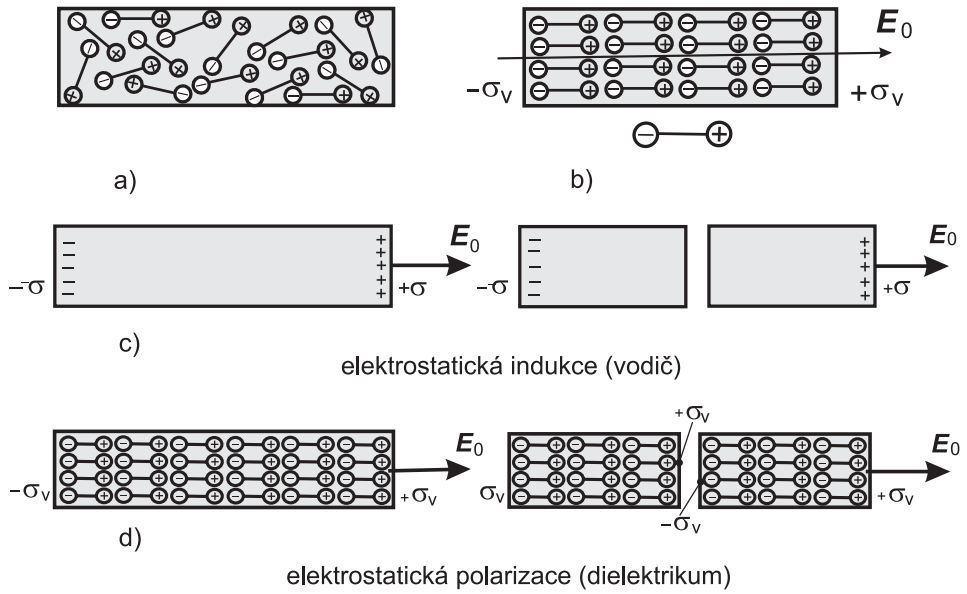
Obr. 2.7. K důkazu Coulombovy věty.

Zdůvodnění. Do povrchu vodiče vložíme krátký váleček, aby jednou podstavou byl ve vodiči a druhou podstavou těsně nad povrchem vodiče. Uvnitř vodiče je $\boldsymbol{E} = 0$, vně vodiče je $\boldsymbol{E} = \mathbf{n}\, E_n$. Podle třetí MR vytéká z povrchu válečku elektrický tok $d\Psi = D\, dS = \sigma\, dS \Rightarrow D = \sigma$. Podle rov. (1.9) je $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\varepsilon$ a tedy $E_n = \sigma/\varepsilon$.

2.1.3. Dielektrikum v elektrickém poli, polarizace dielektrika

Dielektrika (izolátory, nevodiče) nevedou elektrický proud, protože neobsahují volně pohyblivé elektrické náboje.

Dielektrikum můžeme považovat za složené z elementárních dipólů, náhodně uspořádaných (obr. 2.8a). Působí-li na dielektrikum vnější elektrické pole $\boldsymbol{E}_0$, dochází k orientaci dipólů a na odvrácených částech povrchu dielektrika vzniknou povrchové náboje o hustotách $+\sigma_v$ a $-\sigma_v$ (obr. 2.8b). Tento proces se nazývá *polarizace dielektrika*. Povrchové náboje $+\sigma_v$ a $-\sigma_v$ jsou vázány na povrch dielektrika (nelze je odvést), a proto se nazývají *vázané náboje*. Vázané náboje mají své elektrické pole, které uvnitř dielektrika částečně kompenzuje vnější elektrické pole, tak že uvnitř dielektrika je $E < E_0$.

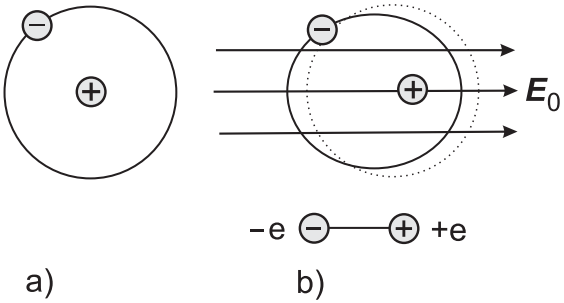


Obr. 2.8. K polarizaci dielektrika.

Porovnejme elektrostatickou indukci (ve vodiči) a polarizaci (v dielektriku). Při elektrostatické indukci dochází ve vodičích k makroskopickým přesunům *volných* nábojů. Kdybychom rozdělili vodič, bude mít jedna jeho část kladný (volný) náboj a druhá záporný (volný) náboj, obr. 2.8c. Polarizace dielektrika je fyzikálně odlišná: izolant je „proelektrován“ (odtud název „dielektrikum“ od „dia“ – skrz). Jestliže rozdělíme polarizované dielektrikum na dvě části, má každá část kladný i záporný (vázaný) náboj, obr. 2.8d.

Polarizace dielektrika je složitý fyzikální proces, u něhož se uplatňují různé mechanizmy, zejména:

- *Elektronová polarizace*. Vlivem vnějšího elektrického pole $\boldsymbol{E}_0$ se posunou atomová jádra (kladné náboje) ve směru působícího pole a elektronový obal (záporné náboje) ve směru opačném. Atom se pak navenek jeví jako *elementární elektrický dipól*. Na obr. 2.9 je naznačena polarizace atomu vodíku, který má jediný obíhající elektron.



Obr. 2.9. Atomová polarizace.

- *Molekulová polarizace*. Některé látky mají molekuly zcela symetrické (*molekuly apolární*), elektricky jsou neutrální, avšak při působení vnějšího elektrického pole se molekula rozestoupí a chová se jako elementární dipól. Jiné látky mají molekuly s nesymetrickou stavbu (*molekuly polární*) a chovají se jako elementární dipóly i bez působení vnějšího elektrického pole.
- *Iontová polarizace*. Molekuly mohou obsahovat kladné a záporné ionty, jež jsou k sobě poutány elektrickými silami. Působí-li na tyto molekuly vnější elektrické pole, kladné ionty se vysunou ve směru intenzity pole, záporné ionty ve směru opačném a molekula se opět projevuje jako *elementární dipól*.
- *Orientační polarizace*. Molekuly konají neuspořádaní tepelný kmitavý pohyb kolem svých rovnovážných poloh. Zvětšuje-li se vnější elektrické pole, elementární dipóly se postupně stáčí, až při určité intenzitě pole dochází k maximální polarizaci (stav nasycení).

Zrušíme-li vnější elektrické pole, vrátí se u některých dielektrik polarizované molekuly do nahodilého uspořádání a dielektrikum se navenek opět jeví jako elektricky neutrální. Některá dielektrika zůstávají více či méně permanentně polarizovaná; nazývají se *elektrety*. Jsou obdobou permanentních magnetů[1)].

Některá dielektrika se polarizují i jinými fyzikálními vlivy, než je působení elektrického pole. Například *piezoelektrické krystaly* se polarizují mechanickým pnutím. Obrácený jev, tj. vznik mechanického napětí působením elektrického pole, se nazývá *elektrostrikce*. Toho se využívá např. při generování ultrazvuku piezoelektrickými generátory.

1) Elektrety, s nimiž se setkáváme v praxi, přitahují ke svému povrchu volné náboje z okolí (prach, ionizovaný vzduch), které kompenzují vázané náboje elektretu, a ten přestává silově působit. U permanentních magnetů k podobnému jevu nedochází, protože neexistují volné magnetické náboje, které by kompenzovaly působené permanentního magnetu.

Tabulka 2.1. Elektrické vlastnosti některých izolantů.

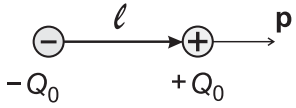
Izolant	Relativní permitivita ε_r [–]	Elektrická pevnost E_p [kV/mm]	Rezistivita ρ při 20 °C [Ωcm]
bakelit	4,8 až 5,3	8 až 10	10^{10}
igelit	3,2	50	10^{15}
lepenka lesklá	2	8	10^{10}
olej transformátorový	2,4	20	10^{13}
papír tvrzený	5,4	15	10^{12}
parafín	2,0 až 2,3	40	3.10^{14}
porcelán	5,5 až 6,7	36	5.10^{14}
sklo	7	15	5.10^{16}

2.1.4. Matematický popis elektrické polarizace, vektor elektrické polarizace

Vyšetříme, jaký vliv má dielektrikum na elektrostatické pole. Elementární elektrický dipól je tvořen dvojicí nábojů $+Q_0$ a $-Q_{0,}$ vzdálenými o délku l (obr. 2.10). Charakterizujeme jej *elektrickým momentem*

$$\boldsymbol{p} = Q_0 \boldsymbol{l} \tag{2.17}$$

(vektor $\boldsymbol{l}$ směřuje od $-Q_0$ k $+Q_0$). Modelem dielektrika je velké množství elementárních dipólů různě natočených a umístěných ve vakuu. Působí-li na tento model vnější elektrické pole $\boldsymbol{E}_0$, dipóly se stáčejí, až (ve stavu nasycení) je vektor $\boldsymbol{l}$ rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{E}_0$. Polarizační náboje se „odhalují" jen na povrchu dielektrika, kdežto uvnitř dielektrika se navzájem ruší. Elektrické momenty elementárních dipólů se však neruší, ale vektorově se sčítají.



Obr. 2.10. Elektrický dipól.

Vektor elektrické polarizace kvantitativně charakterizuje hustotu momentů elementárních dipólů polarizovaného dielektrika

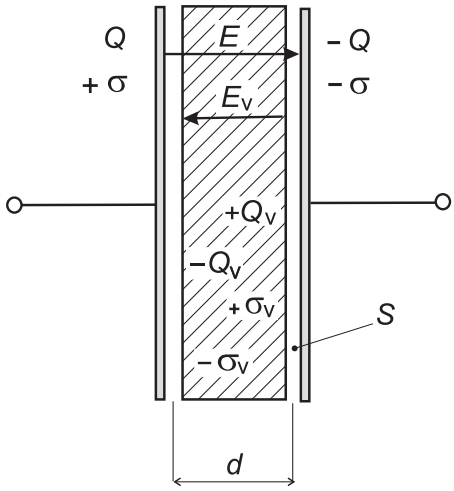
$$\boldsymbol{P} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}V} \quad \left[\mathrm{C/m^2}\right] \tag{2.18}$$

Speciálně: deskový kondenzátor (obr. 2.11). Polarizací jeho dielektrika vznikne na plochách S vázaný náboj $\pm Q_v$, který je rozložen s plošnou hustotou σ_v. Dielektrikum lze považovat za jediný dipól, jehož moment je $p = Q_v d$. Velikost vektoru polarizace je

$$P = \frac{p}{V} = \frac{Q_v\, d}{S\, d} = \frac{Q_v}{S} = \sigma_v \tag{2.19}$$

Elektrickou indukci $\boldsymbol{D}$ můžeme v izotropním prostředí definovat [kromě definice podle rov. (1.9)] pomocí elektrické indukce ve vakuu a vektoru elektrické polarizace:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{2.20}$$



Obr. 2.11. Deskový kondenzátor s polarizovaným dielektrikem.

Obě definice, vyjádřené rovnicemi (1.9) a (2.20), jsou v souladu; jejich porovnáním dostáváme vektor polarizace

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\, \boldsymbol{E}$$

anebo

$$\boldsymbol{P} = \kappa_e \boldsymbol{E} \tag{2.21}$$

kde veličina

$$\kappa_e = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \quad [-] \quad \kappa_e \geq 0 \tag{2.22}$$

se nazývá *elektrická susceptibilita*; je materiálovou charakteristikou a alternativní veličinou k permitivitě ε.

Ve vakuu ($\varepsilon_r = 1$, $\kappa_e = 0$) k polarizaci nedochází, $\boldsymbol{P} = 0$ a rov. (2.20) přechází na

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

Poznámky

- Vektor elektrické indukce $\boldsymbol{D}$ má týž směr jako intenzita $\boldsymbol{E}$, avšak výrazně se od něho liší: zdrojem elektrické indukce $\boldsymbol{D}$ jsou (v libovolném prostředí) *jen volné náboje*. Vektor $\boldsymbol{D}$ tedy nezávisí na prostředí, tedy na ε_r. Naproti tomu zdrojem vektoru $\boldsymbol{E}$ jsou *volné i vázané náboje* (viz následující příklad 2.2 a příklad 3.2).

■ Vyjádříme vliv dielektrika na elektrostatické pole. Rov. (2.20) zapíšeme ve tvaru

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P})$$

Aplikací operace „divergence“ a použitím třetí MR v diferenciálním tvaru dostaneme

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \rho_v) \tag{2.23}$$

kde ρ_v je objemová hustota vázaného (polarizačního) náboje:

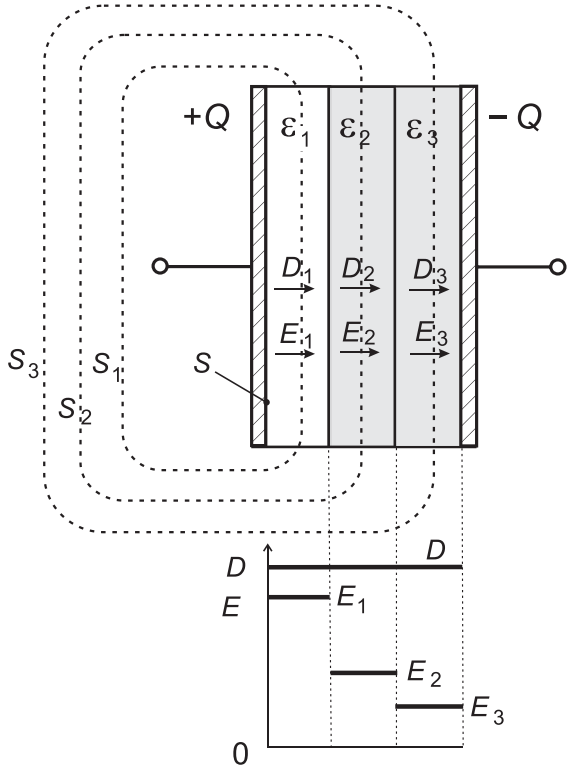
$$\rho_v = -\operatorname{div} \boldsymbol{P} \tag{2.24}$$

Z rov. (2.23) plyne alternativní vyjádření Poissonovy rovnice pro elektrický potenciál:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_v) \tag{2.25}$$

Příklad 2.2.

Vyšetřete intenzitu $\boldsymbol{E}$ a indukci $\boldsymbol{D}$ v trojvrstvovém dielektriku deskového kondenzátoru, obr. 2.12. Relativní permitivity vrstev jsou: $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 2$, $\varepsilon_{r3} = 4$.



Obr. 2.12. K příkladu 2.2.

Řešení:

Zvolíme tři uzavřené plochy S_1, S_2, S_3, tak, aby každá plocha procházela jednou vrstvou dielektrika. Podle třetí MR v integrálním tvaru platí: indukce $\boldsymbol{D}$ je spojitá, ve všech vrstvách je stejná (nezávislá na ε):

$$\oint_{S_1,S_2,S_3} \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_1 S = D_2 S = D_3 S = Q \Rightarrow \quad D_1 = D_2 = D_3 = \frac{Q}{S}$$

naproti tomu intenzita $\boldsymbol{E}$ má na rozhraní dielektrik nespojitosti:

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{1}{2}E_1, \quad E_3 = \frac{1}{4}E_1$$

2.2. Stacionární proudové pole

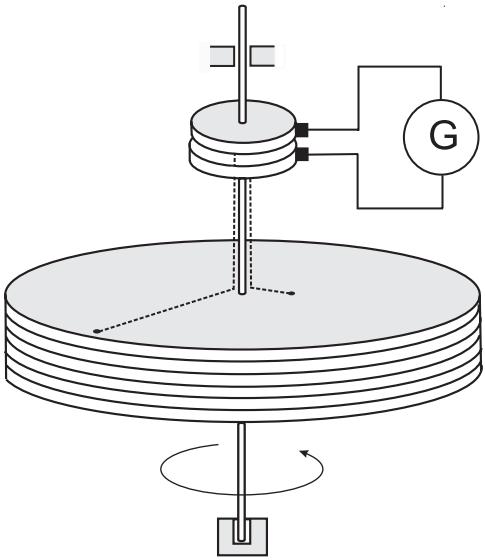
V elektrostatice (tj. v elektrickém poli nepohybujících se nábojů) neexistuje *trvalý* elektrický proud. Zdroje napětí (galvanické články, termočlánky, dynama apod.) mají tu vlastnost, že na jejich záporné svorce je trvale nadbytek elektronů a na jejich kladné svorce je jich nedostatek. Těmito zdroji můžeme ve vodiči trvale udržovat elektrické pole a tedy i tok nosičů elektřiny. Jestliže se náboje pohybují konstantní rychlostí, hovoříme o *stacionárním elektrickém proudu*.

V kovu tvoří volné elektrony *elektronový plyn*: elektrony se chaoticky pohybují, přičemž jejich rychlost je závislá na teplotě, obdobně jako u molekul plynu. Magnetické pole pohybujících se elektronů se vzhledem k jejich neuspořádaného pohybu makroskopicky neprojevuje. Působí-li ve vodiči elektrické pole, superponuje se k chaotickému tepelnému pohybu volných elektronů jejich pohyb směřující *proti* směru vektoru $\boldsymbol{E}$ (elektrony mají záporný náboj). Tento pohyb se nazývá *driftový*. Budeme uvažovat pouze tuto složku pohybu elektronů, neboť vytváří (v makroskopickém měřítku) elektrický proud ve smyslu definičního vztahu (1.4). V 1. kapitole jsme ukázali, že proudovou hustotu tohoto proudu lze vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{J} = -\rho^{-}\boldsymbol{v} \tag{2.26}$$

kde ρ^{-} je hustota náboje volných elektronů a $\boldsymbol{v}$ je střední rychlost jejich driftového pohybu. Pro obvyklé hodnoty proudové hustoty je $\rho^{-} = 3.10^9$ C/m^3 a v je řádově milimetry za sekundu.

Na obr. 2.13 je naznačen experimentální důkaz elektronové vodivosti kovů (T. Stewart, C. R. Tolman, r. 1916). Plochá cívka o velkém počtu závitů tenkého drátuje je uvedena do rychlé rotace, při níž závity dosahují rychlosti až 300 m/s. Po náhlém zastavení cívky indikuje galvanometr proudový impuls, jímž se projeví setrvačnost elektronového plynu.



Obr. 2.13. Stewartův-Tolmanův pokus.

2.2.1. Rovnice stacionárního proudového pole

Základní rovnice elektromagnetického pole nabývají pro stacionární elektrické proudové pole tento tvar:

	Integrální tvar	Diferenciální tvar
Druhá MR	$\oint_c \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$
Zákon kontinuity	$\oint_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$	$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$
Ohmův zákon	$I = GU = \frac{U}{R}$	$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}$

V předchozí kapitole jsme uvedli, že proud I je tok vektoru $\boldsymbol{J}$ plochou S (průřezem vodiče):

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.27}$$

Druhá MR pro stacionární proudové pole má tvar stejný jako v elektrostatice. Všechny důsledky, které z ní v elektrostatice vyplývají, platí i zde: elektrické pole je potenciální, napětí mezi dvěma body nezávisí na tvaru dráhy po níž se určuje atd. Avšak na rozdíl od elektrostatiky *povrch vodiče, jímž protéká proud, není ekvipotenciální plochou*. Uvnitř vodiče připojeného ke zdroji napětí je trvale $\boldsymbol{E} \neq 0$, tedy grad $\varphi \neq 0$, čili $\varphi \neq$ konst.

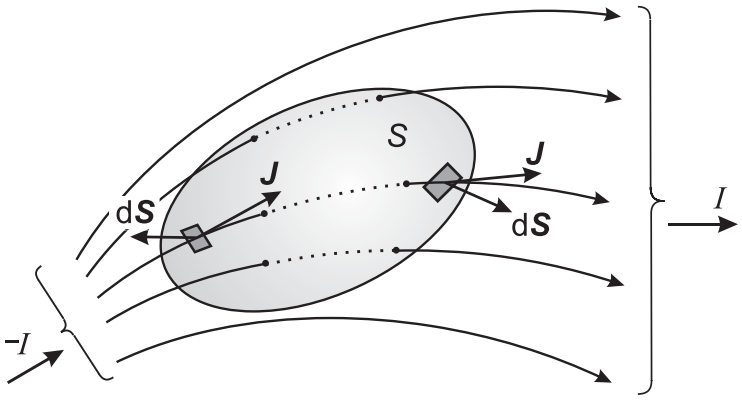
Zákon kontinuity stacionárního proudu: stacionární proud I vtékající do libovolné uzavřené plochy S je roven proudu z této plochy vytékajícímu, obr. 2.14:

$$\oint_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.28}$$

Diferenciální tvar zákona kontinuity je

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0 \tag{2.29}$$

Proudové pole je tedy *nezřídlové* (*solenoidální*).

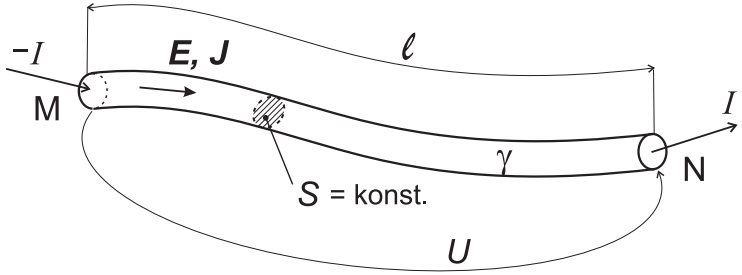


Obr. 2.14. Kontinuita proudového pole.

Ohmův zákon v integrálním tvaru je vyjádřen rovnicí

$$I = GU = \frac{U}{R} \tag{2.30}$$

kde I a U jsou proud a napětí vodiče, R je *elektrický odpor* vodiče a jeho převrácená hodnota je jeho *elektrická vodivost* (obr. 2.15). Jednotkou elektrického odporu je ohm [Ω], jednotkou elektrické vodivosti je siemens [S].



Obr. 2.15. Vodič délky l, konstantního průřezu.

Diferenciální tvar Ohmova zákona je

$$\boldsymbol{J} = \gamma\,\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}}{\rho} \tag{2.31}$$

Odvození. Elektrické pole $\boldsymbol{E}$ ve vodiči působí na elektron (jeho náboj je e a hmota m) silou $e\boldsymbol{E}$. Elektron se pohybuje driftovou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Podle druhého Newtonova zákona je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\ , \quad \text{po integraci} \quad \boldsymbol{v} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m}t$$

Označíme-li střední dobu mezi dvěma srážkami elektronu s ionty mříže t_s , je střední driftová rychlost

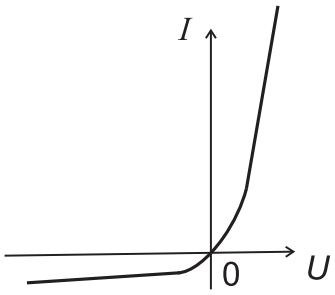
$$\boldsymbol{v}_s = \frac{e\boldsymbol{E}}{2m}t_s \qquad (*)$$

Do vztahu (1.11) dosadíme za $\rho = ne$ (n je počet elektronů v jednotce objemu)a za $\boldsymbol{v}$ dosadíme $\boldsymbol{v}_s$ z rov. (*). Dostaneme $\boldsymbol{J} = \gamma\,\boldsymbol{E}$, kde $\gamma = \frac{ne^2t_s}{2m}$.

Z Ohmova zákona v diferenciálním tvaru (konduktivita γ je skalární funkce) je zřejmé, že průběh siločar je shodný s průběhem proudnic.

Jestliže konduktivita γ = konst. (vztah mezi $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{E}$ je lineární), nazýváme ji *lineární*. Existuje velká skupina materiálů, jejichž konduktivita $\gamma = \gamma(J, E)$; nazýváme ji *nelineární* konduktivitou. Materiály s nelineární konduktivitou dělíme do dvou skupin:

- Nelinearita konduktivity je způsobena vnitřní strukturou hmoty (např. usměrňovače). Tuto nelinearitu zpravidla vyjadřujeme závislostí proudu na napětí, tzv. *voltampérovou charakteristikou*, obr. 2.16.



Obr. 2.16. Voltampérová charakteristika polovodičové diody.

- Materiály, jejichž konduktivita nezávisí přímo na proudu nebo napětí, ale závisí na jiné fyzikální veličině, která se mění v závislosti na proudu či napětí. Jako příklad uveďme závislost konduktivity na teplotě, na magnetickém poli, na mechanickém pnutí apod.

Podrobněji si všimneme vlivu teploty na rezistivitu. Podle elektronové teorie se s teplotou zvyšuje rychlost elektronů (tvořících elektronový plyn) v iontové mřížce kovů. Tím se zkrátí střední doba t_s mezi dvěma srážkami a konduktivita se zmenší.

Závislost rezistivity $\rho = 1/\gamma$ na teplotě T zjišťujeme měřením. Experimentálně zjištěnou závislost $\rho = \rho(T)$ zpravidla aproximujeme mocninnou řadou

$$\rho = \rho_0\left[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \ldots..\right]$$

kde ρ je rezistivita při teplotě T, ρ_0 je rezistivita při teplotě T_0 a α, β, ... jsou tzv. *teplotní součinitelé odporu*. U běžně používaných kovových vodičů se při nevelkém rozsahu teplot (např. 0 až 100 °C) omezujeme na prvé dva členy rozvoje:

$$\rho \cong \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

kde $\Delta T = T - T_0$ je oteplení vodiče.

Rezistivita kovů s teplotou stoupá ($\alpha > 0$), u polovodičů zpravidla klesá ($\alpha < 0$).

Používají se i jiné aproximace změřené závislosti $\rho = \rho(T)$, např. vztah

$$\rho = \rho_0 \, \mathrm{e}^{k\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

kde konstanta k je u kovů $k < 0$, u polovodičů $k > 0$.

Při velmi nízkých teplotách nastává při určité *kritické teplotě* T_k náhlý pokles rezistivity, prakticky na nulu ($\rho < 10^{-25}$ Ωm), vzniká *supravodivý stav* vodiče. Mechanizmus supravodivého proudu je fyzikálně odlišný od mechanizmu obyčejného vodivého proudu.

Tabulka 2.2. Konduktivita γ a teplotní součinitel α pro některé kovy.

kov	konduktivita γ [S/m]	teplotní součinitel α [deg^{-1}]
hliník	$3{,}4.10^7$	$4{,}0.10^{-3}$
měď	$5{,}7.10^7$	$4{,}0.10^{-3}$
ocel	$1{,}4.10^7$	$5{,}0.10^{-3}$
olovo	$4{,}8.10^7$	$3{,}8.10^{-3}$
stříbro	$6{,}3.10^7$	$4{,}0.10^{-3}$
zinek	$1{,}6.10^7$	$3{,}9.10^{-3}$

Výpočet odporu vodičů jednoduchých tvarů

Výpočtu elektrického odporu R, resp. vodivosti G pro různé tvary vodičů se budeme věnovat v kapitole 7.3. Zde uvedeme dva často se vyskytující speciální případy vodičů.

1. Stanovíme odpor vodiče, jestliže známe jeho průřez S, jenž je ekvipotenciální plochou. Proudová hustota $\boldsymbol{J}$ je pak k této ploše kolmá a v každém bodu této plochy má stejnou velikost J, obr. 2.15. Proudnice mají tvar křivky l a vodič má konduktivitu γ. Pro napětí U_{MN} mezi konci vodiče platí:

$$U_{\mathrm{MN}} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{\boldsymbol{J}}{\gamma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{\boldsymbol{J}\,S}{\gamma\,S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{I}{\gamma\,S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \int_{l} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\gamma\,S}$$

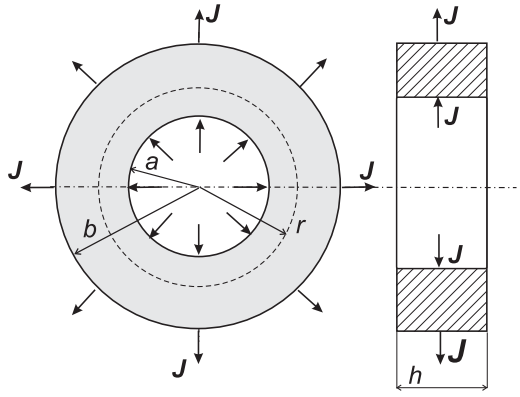
   Porovnáním s Ohmovým zákonem v integrálním tvaru, rov. (2.30), je

$$R = \int_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\gamma S} \tag{2.32}$$

Častým případem je vodič konstantního průřezu S, délky l, z homogenního lineárního materiálu o konduktivitě γ = konst. Pak $R = \dfrac{l}{\gamma S}$.

Příklad 2.3.

Stanovte odpor vodivého prstence z materiálu o konduktivitě γ, jímž prochází proud v radiálním směru (obr. 2.17).



Obr. 2.17. K příkladu na výpočet elektrického odporu.

Řešení:

Podle rov. (2.32) je

$$R = \int_l \frac{\mathrm{d}l}{\gamma S} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\gamma 2\pi r h} = \frac{1}{2\pi\gamma h}\ln\frac{b}{a}$$

2. Stanovíme odpor vodiče, u něhož známe průběh proudnic l a víme, že ve všech bodech téže proudnice má intenzita elektrického pole stejnou velikost E. Proud I protékající průřezem S je

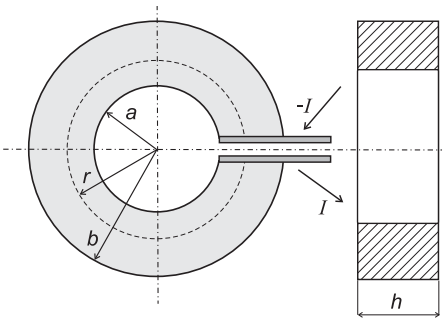
$$I = \int_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \gamma\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\gamma\,\boldsymbol{E}\,l}{l}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\gamma U}{l}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = U\int_S \frac{\gamma\,\mathrm{d}S}{l}$$

Porovnáním s Ohmovým zákonem v integrálním tvaru dostáváme

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\displaystyle\int_S \frac{\gamma}{l}\mathrm{d}S}$$

Příklad 2.4.

Stanovte odpor vodivého prstence o konduktivitě γ, který je radiálně rozříznut a proud jím protéká podle obr. 2.18.



Obr. 2.18. K příkladu na výpočet elektrického odporu.

Řešení:

Vodivost prstence je

$$G = \int_S \frac{\gamma \,\mathrm{d}S}{l} = \int_a^b \frac{\gamma\, h\, \mathrm{d}r}{2\pi r} = \frac{\gamma h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \text{ odkud } R = \frac{1}{G} = \frac{2\pi}{\gamma h \ln \frac{b}{a}}$$

Elektrický potenciál

Ze druhé MR je zřejmé, že *stacionární proudové pole je potenciální*.Můžeme tedy zavést skalární elektrický potenciál φ vztahem

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi \tag{2.33}$$

Vlastnosti potenciálu proudového pole byly probrány v elektrostatice.

Pro potenciál φ platí Laplaceova rovnice

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.34}$$

Odvození. Z rovnice kontinuity, Ohmova zákona a z definice (2.33) plyne:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = \mathrm{div}(\gamma\,\boldsymbol{E}) = \mathrm{div}\,\gamma\,(-\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$$

Pro γ = konst. dostáváme: div grad $\varphi = 0$, což je rov. (2.34).

Podmínky na rozhraní pro vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{J}$ vyjádříme pomocí potenciálu:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{2.35}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \tag{2.36}$$

Princip superpozice platí analogicky jako v elektrostatice, ovšem jen pro lineární vodivé prostředí, tj. pro prostředí, jehož konduktivita je γ = konst.

2.2.2. Zákony elektrických obvodů

Vtištěné síly, zobecněný Ohmův zákon

Elektrický proud získáváme pomocí *zdrojů* elektrické energie, přesněji pomocí *měničů*, které převádějí některou neelektrickou formu energie na energii elektrickou. Z energetického hlediska mají největší význam elektrické točivé generátory, v poslední době též fotovoltaické generátory. Uplatňují se též zdroje elektrochemické (galvanické a palivové články), termoelektrické aj. Perspektivní jsou měniče pro přímou přeměnu energie, např. magnetohydrodynamické generátory.

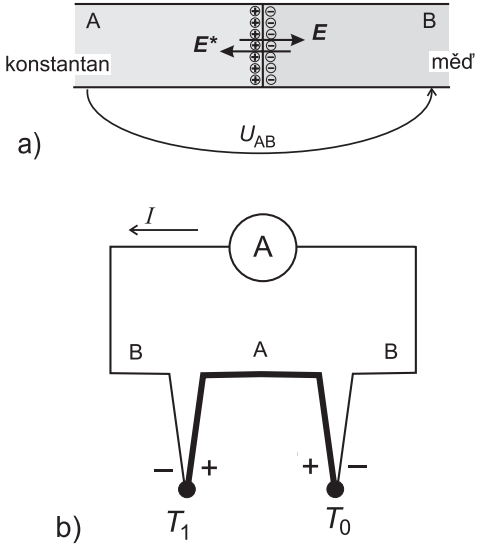
Podle rovnice kontinuity je konstantní proud vždy uzavřený. Připojíme-li ke svorkám stejnosměrného zdroje odpor R, protéká jím konstantní proud vně zdroje, od kladné svorky k záporné a uzavírá se vnitřkem zdroje, kde prochází od záporné svorky ke kladné, tedy *proti* směru působení elektrických sil. Procesy uvnitř zdroje zřejmě odporují Ohmovu zákonu. Makroskopické vysvětlení zavádí uvnitř zdroje kromě elektrické síly $\boldsymbol{E}$ ještě další sílu neelektrického původu, tzv. *vtištěnou sílu*. Intenzitu vtištěné síly označme $\boldsymbol{E}^*$. Pro vektor $\boldsymbol{J}$ pak platí *zobecněný Ohmův zákon:*

$$\boldsymbol{J} = \gamma\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*) \tag{2.37}$$

Pojem vtištěná síla objasníme na dvou příkladech.

Termočlánek

V místě styky dvou různých kovů, které se liší svou výstupní prací a prostorovou hustotou elektronového plynu (tj. volných elektronů, které se chaoticky pohybují v pevné mřížce kovů) prochází jedním směrem více elektronů než druhým směrem. Například v místě styku dvojice kovů měď – konstantan přechází více elektronů z konstantanu do mědi než opačným směrem, obr. 2.19a. Tento termodynamický proces probíhá tak, jako kdyby na elektrony působilo v místě styku jakési cizí elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}^*$; nazveme ho *vtištěné pole*.



Obr. 2.19. Vtištěná síla E u termočlánku.*

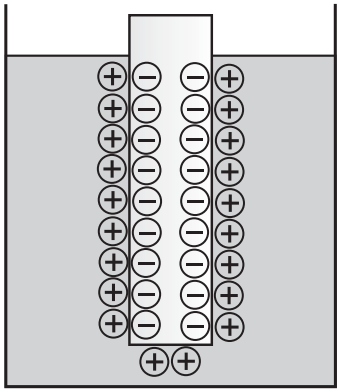
Elektrický proud (tj. tok elektronů rozhraním) trvá tak dlouho, až pole způsobené elektrostatickým rozložením nábojů je tímto vtištěným polem vykompenzováno, tedy až

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^* = 0\,, \text{ čili } \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}^*$$

Rozdíl potenciálů elektrostatického rozložení nábojů určuje *kontaktní potenciál* U_{AB} obou kovů. Závislost kontaktního potenciálu na teplotě způsobuje, že obvodem podle obr. 2.19b, v němž pro teploty v místech styku platí $T_1 > T_0$, protéká proud I.

Galvanický článek

Ponoříme-li kovovou elektrodu do roztoku H_2SO_4, působí na kladné ionty v kovu *elektrolytický rozpouštěcí tlak*: ionty přecházejí do elektrolytu a elektroda se nabíjí záporně. Ionty, které přešly do elektrolytu, se za působení *osmotického tlaku*, jímž jsou puzeny z elektrolytu na elektrodu, soustřeďují v tenké vrstvě na povrchu elektrody, čímž vzniká tzv. *difúzní elektrické dvojvrstva*, obr. 2.20. Elektrochemický proces, jímž vzniká elektrická dvojvrstva, makroskopicky nahrazujeme působením vtištěné síly o intenzitě $\boldsymbol{E}^*$. Proces je v rovnovážném stavu, když rozhraním elektroda – elektrolyt neprochází proud, což nastane, když $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^* = 0$.



Obr. 2.20. Vtištěná síla E u galvanického článku.*

Kirchhoffovy zákony

Kirchhoffovy zákony jsou základními pilíři teorie elektrických obvodů. Byly objeveny experimentálně (R. G. Kirchhoff, r. 1845) a vyplývají z rovnic proudového pole.

První Kirchhoffův zákon

Pro libovolný uzel obvodu platí: součet proudů vystupujících z uzlu a proudů stupujících do uzlu je roven nule. Přitom proudy vystupující z uzlu bereme jako kladné a proudy vstupující do uzlu jako záporné.

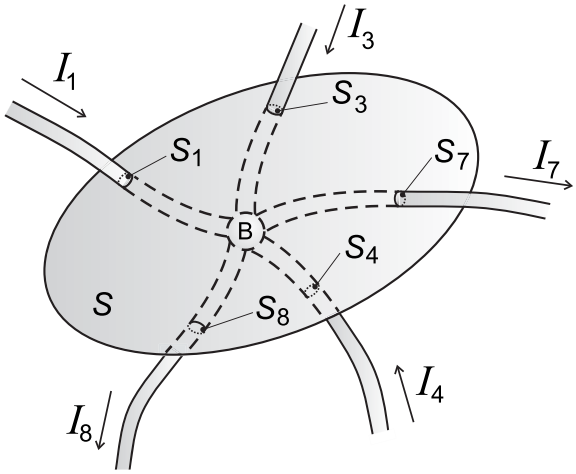
Odvození. Libovolný uzel obvodu B nechť inciduje s větvemi v_k (hodnoty indexu k určují všechny větve, které incidují s uzlem B). Uzel B obklopíme libovolnou uzavřenou orientovanou plochou S (obr. 2.21). Použijeme rovnici kontinuity (2.28). Tok vektoru proudové hustoty plochou S je

$$\oint_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{\substack{k \\ (\mathrm{B}\in v_k)}} \int_{S_k} \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

kde S_k jsou průřezy větví, které vytíná plocha S. Podle rov. (1.18) vyjadřují sčítanci proudy ve větvích v_k :

$$\sum_{\substack{k \\ (\mathrm{B} \in v_k)}} \pm I_k \;=\; 0 \tag{2.38}$$

Platí znaménko +, jestliže proud do uzlu vstupuje a znaménko – v opačném případě.



Obr. 2.21. K odvození prvního Kirchhoffova zákona.

Příklad 2.5.

Formulujte první Kirchhoffův zákon pro uzel B podle obr. 2.21.

Řešení:

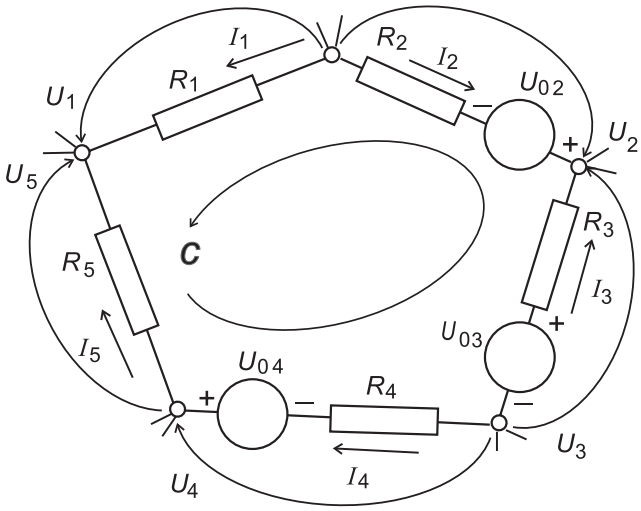
$$-I_1 - I_3 - I_4 + I_7 + I_8 = 0$$

Druhý Kirchhoffův zákon

Pro libovolnou orientovanou smyčku obvodu platí: Součet napětí na všech větvích incidujících s orientovanou smyčkou je roven nule. Přitom napětí bereme jako kladná, jestliže proud ve větvi prochází ve smyslu orientace smyčky a jako záporná, jestliže prochází v opačném směru.

Odvození. Mějme libovolnou orientovanou smyčku *c* incidující s větvemi v_k (index *k* určuje všechny větve incidující se smyčkou *c*) (obr. 2.22). Použijeme druhou MR a pro oběhové napětí ve smyčce *c* dostáváme:

$$\sum_{\substack{k \\ (v_k \in c)}} \int_{v_k} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \;=\; 0$$



Obr. 2.22. K odvození druhého Kirchhoffova zákona.

Podle rov. (1.13) vyjadřují sčítanci napětí větví v_k :

$$\sum_{\substack{k \\ (v_k \in c)}} \pm U_k \;=\; 0 \tag{2.39}$$

Platí znaménko +, jestliže proud I_k má směr souhlasný se smyčkou c a znaménko – v opačném případě.

Příklad 2.6.

Formulujte druhý Kirchhoffův zákon pro smyčku c podle obr. 2.22.

Řešení:

$$U_1 - U_5 - U_4 + U_3 - U_2 = 0$$

Jiný tvar druhého Kirchhoffova zákona

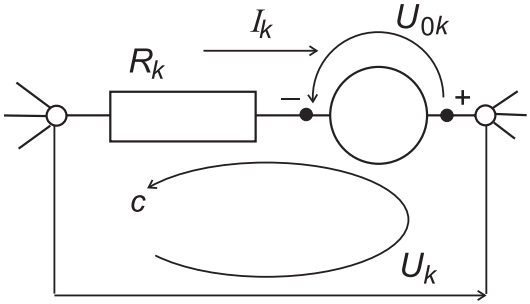
Pro napětí k-té větve obvodu U_k, obsahující zdroj napětí U_{0k} a odpor R_k (obr. 2.23), platí podle druhého Kirchhoffova zákona

$$U_k + U_{0k} - R_k I_k = 0$$

Dosazením do rov. (2.39) dostáváme

$$\sum_{\substack{k \\ (v_k \in c)}} \pm R_k\, I_k \;=\; \sum_{\substack{k \\ (v_k \in c)}} \pm U_{0k} \tag{2.40}$$

Protéká-li proud I_k ve smyslu orientace smyčky c, platí na levé straně znaménko + ; je-li zdroj napětí U_{0k} zapojen tak, že při postupu ve smyslu orientace smyčky c procházíme vně zdroje od svorky + ke svorce – , platí na pravé straně znaménko +. Znaménka – bereme v opačných případech.



Obr. 2.23. Větev elektrického obvodu.

2.3. Stacionární magnetické pole

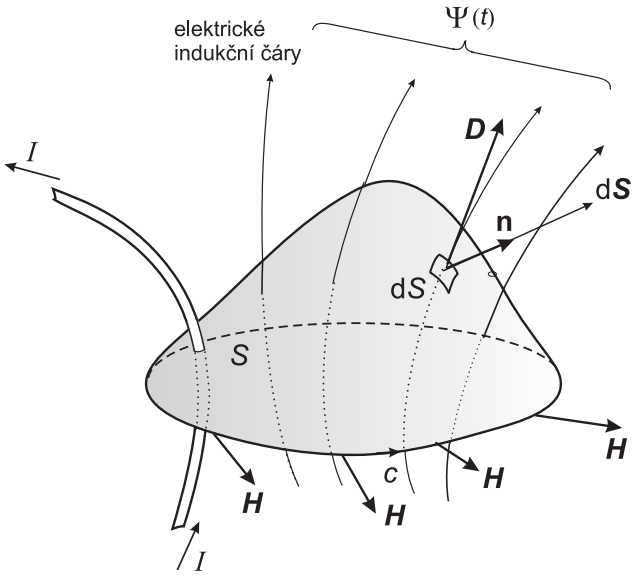
Zdrojem *stacionárního* magnetického pole jsou stejnosměrné proudy. Permanentní magnety indukují *magnetostatické* pole.

2.3.1. Rovnice magnetického pole

Základní rovnice stacionárního (resp. statického) magnetického pole jsou:

	Integrální tvar	Diferenciální tvar
První MR	$\oint_c \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$
Čtvrtá MR	$\oint_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$	$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$
		$\boldsymbol{B} = \mu\,\boldsymbol{H}$

První Maxwellova rovnice v integrálním tvaru vyjadřuje, že *oběhové magnetické napětí na libovolné orientované křivce je rovno proudu, který je s touto křivkou spřažen*. Pojem „*proud spřažený s křivkou c*“ jsme vysvětlili v 1. kapitole: je to proud, který prochází libovolnou orientovanou plochou *S*, jež je ohraničena křivkou *c*, přičemž plocha *S* je orientována vůči křivce *c* pravotočivě (obr. 2.24). Pomůckou pro určení pravotočivé orientace je *pravidlo pravé ruky* (viz první kapitolu).



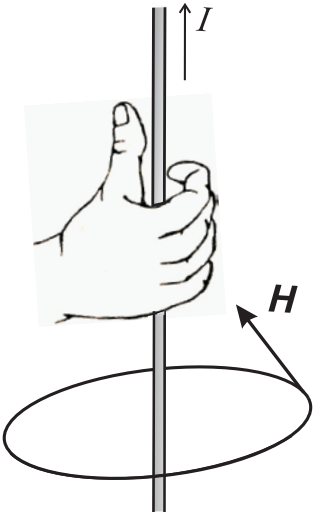
Obr. 2.24. K první Maxwellově rovnici.

Příklad 2.7.

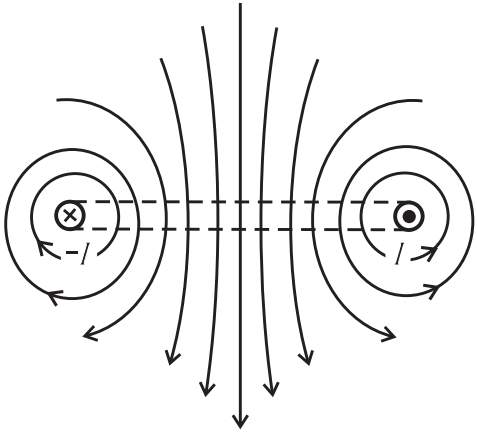
Stanovte směr vektoru ***H***, jestliže známe směr proudu: a) ve vodiči, b) v kruhovém závitu.

Řešení:

Nalezneme snadno pomocí pravidla pravé ruky: a) obr. 2.25, b) obr. 2.26, kde symbolem ⊗ označujeme proud tekoucí *do nákresny*, a symbolem ⊙ proud *vystupující z nákresny*. (Mnemotechnická pomůcka: symbol per šípu letícího od pozorovatele a symbol hrotu šípu.)



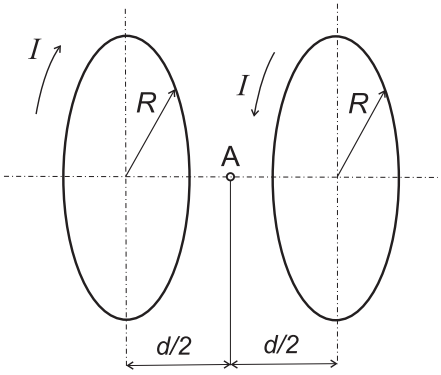
Obr. 2.25. K příkladu 2.7a.



Obr. 2.26. K příkladu 2.7b.

Příklad 2.8.

Dvě souosé kruhové cívky jsou protékány týmž proudem, ale v opačném směru, obr. 2.27. Stanovte magnetickou indukci v bodě A.



Obr. 2.27. K příkladu 2.8.

Řešení:

$\boldsymbol{H}(\mathrm{A}) = 0$.

2.3.2. Definice a vlastnosti skalárního magnetického potenciálu

Magnetické pole je v obecném případě vírové (nepotenciální). Nelze tedy postupovat analogicky jako v elektrostatice; můžeme tak učinit *pouze ve speciálním případě*, když se jedná o magnetostatické pole, kdy pravá strana první MR je nulová:

$$\oint_c \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0$$

■ *Definice skalárního magnetického potenciálu*. Magnetický potenciál označme φ_m. Je definován vztahem

$$\boldsymbol{H} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi_\mathrm{m} \tag{2.41}$$

kde potenciál $\varphi_\mathrm{m}(x,y,z)$ je skalární spojitou funkcí polohy. Jednotkou φ_m je ampér [A].

Vlastnosti skalárního magnetického potenciálu jsou analogické jako u elektrického potenciálu.

■ *Fyzikální interpretace elektrického potenciálu*. Mezi body M a N v magnetostatickém poli je magnetické napětí

$$U_{\mathrm{mMN}} = \int_{\mathrm{M}(l)}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \varphi_\mathrm{m}(\mathrm{M}) - \varphi_\mathrm{m}(\mathrm{N}) \quad [\mathrm{A}] \tag{2.42}$$

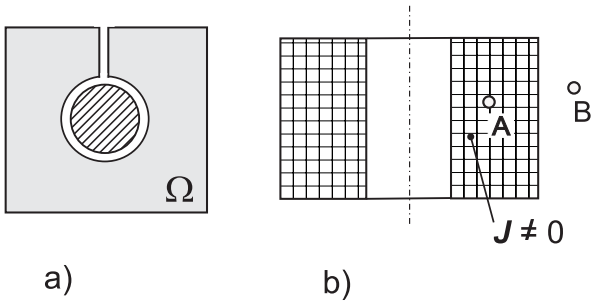
Jeho hodnota nezávisí na integrační dráze. Jednotkou je ampér [A].

Příklad 2.9.

Rozhodněte, zda lze zavést skalární magnetický potenciál φ_m v těchto případech:

a) Vodič kruhového průřezu protékaný proudem, v jeho okolí je vymezena oblast Ω, obr. 2.28a.

b) Cívka protékaná proudem, bod A je v průřezu cívky, bod B je vně cívky, obr. 2.28b.



Obr. 2.28. K příkladu 2.9.

Řešení:

a) Lze zavést skalární magnetický potenciál φ_m, neboť v Ω neexistuje smyčka *c* spřažená s proudem.

b) Nelze zavést φ_m(A), neboť $\boldsymbol{J}$(A) ≠ 0, ale lze zavést φ_m(B), neboť $\boldsymbol{J}$(B) = 0.

■ *Rovnice pro skalární magnetický potenciál*. V lineárním, izotropním a homogenním prostředí (tj. pro μ = konst.) platí pro potenciál φ_m Laplaceova rovnice

$$\Delta \varphi_m = 0 \tag{2.43}$$

Odvození rov. (2.43) je snadné: ze čtvrté MR v diferenciálním tvaru a z rov. (1.10) a (2.41) dostáváme:

div $\boldsymbol{B}$ = div $\mu\boldsymbol{H}$ = div(–grad φ_m) = 0, odkud rov. (2.43).

■ *Skalární magnetický potenciál na rozhraní mezi dvěma magnetiky*. Na rozhraní dvou magnetik lze podmínky pro $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{B}$ vyjádřit pomocí skalárního magnetického potenciálu:

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \tag{2.44}$$

tj. potenciál je i na rozhraní spojitý a dále platí

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \tag{2.45}$$

Odvození vyplývá z rovnic (VIII) pro $K_n = 0$, (IX), (1.10) a (2.41).

Podmínky pro zavedení skalárního magnetického potenciálu nebývají splněny. Proto se častěji používá vektorový magnetický potenciál, který lze zavést bez omezení.

2.3.3. Definice a vlastnosti vektorového magnetického potenciálu

- *Definice vektorového magnetického potenciálu*. Vektorový magnetický potenciál $\boldsymbol{A}$ je definován vztahem

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{2.46}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je vektorová funkce polohy. Jednotkou je weber na metr [Wb/m].

- *Motivace* této definice. Podle čtvrté MR platí

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{*}$$

Z vektorové analýzy je známo, že pro spojitou funkci polohy $\boldsymbol{A}$ platí

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{**}$$

Z rovnic (*) a (**) plyne rov. (2.46).

- *Spojitost vektorového magnetického potenciálu*. Vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ je spojitou funkcí polohy. Pro regulární body pole to plyne z definice (2.46), pro neregulární body, např. pro rozhraní mezi různými dielektriky, z podmínek na rozhraní.

- *Jednoznačnost*. Vektorový magnetický potenciál $\boldsymbol{A}$ je definován rovnici (2.46) jednoznačně až na aditivní vektorovou funkci tvaru grad Ψ, kde Ψ je libovolná spojitá skalární funkce polohy. Snadno se o tom přesvědčíme: pro

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\Psi \tag{2.47}$$

s přihlédnutím k vektorové identitě rot grad $\Psi = 0$, dostáváme

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}' \;\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rot\ grad}\,\Psi = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

Proto klademe na vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ doplňující podmínku, jejíž volbou omezíme třídu funkcí Ψ ve vztahu (2.47). Dále odvozovaná rovnice pro $\boldsymbol{A}$ se zjednoduší, volíme-li tuto podmínku ve tvaru

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.48}$$

Nazývá se *Coulombova doplňující podmínka* (též *kalibrační podmínka)*.

Jednoznačnost $\boldsymbol{A}$ docílíme jeho *normováním*, tj. volbou místa, kde $\boldsymbol{A}$ nabývá určitou (zvolenou) hodnotu, zpravidla $\boldsymbol{A} = 0$.

Příklad 2.10.

Lze považovat vektorovou funkci $\boldsymbol{A} = \mathbf{k}\,B_0\,y$ za vektorový potenciál? Jestliže ano, jaká magnetická indukce mu odpovídá?

Řešení:

Funkce $\boldsymbol{A}$ splňuje doplňující podmínku (2.48), může tedy být vektorovým potenciálem. Odpovídá mu magnetická indukce

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_0 y \end{vmatrix} = \mathbf{i}\, B_0$$

tj. homogenní magnetické pole. Týž výsledek dostaneme i pro jiné hodnoty vektorového potenciálu, např. pro $\boldsymbol{A} = \mathbf{k} B_0 (y + c)$, kde c je reálná konstanta. Vidíme tedy, že – stejně jako u skalárního elektrického potenciálu φ – danému magnetickému poli neodpovídá jediný vektorový potenciál.

■ *Rovnice pro vektorový magnetický potenciál – obecně*. V regulárních bodech lineárního, homogenního, izotropního magnetika platí pro $\boldsymbol{A}$ vektorová Poissonova rovnice

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{2.49}$$

V oblasti, v níž je $\boldsymbol{J} = 0$, platí vektorová Laplaceova rovnice

$$\Delta \boldsymbol{A} = 0 \tag{2.50}$$

Důkaz. Z rovnic (Ia*), (1.11) a (2.46) dostáváme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}$$

Použitím vektorové identity rot rot $\boldsymbol{A}$ = grad div $\boldsymbol{A}$ – $\Delta \boldsymbol{A}$ a Coulombovy doplňující podmínky (2.48) dostáváme rov. (2.49). Doplňující podmínku je výhodné zvolit právě ve tvaru rov. (2.48), neboť, jak je patrno z uvedeného odvození, rovnice pro vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ se tím výrazně zjednoduší.

■ *Rovnice pro vektorový magnetický potenciál pro 2D magnetické pole*

a) V pravoúhlých souřadnicích (x,y) je

$$\boldsymbol{B}(x,y) = \mathbf{i}\, B_x(x,y) + \mathbf{j}\, B_y(x,y)$$

Proudová hustota $\boldsymbol{J}$, která toto pole indukovala, má zřejmě pouze z-ovou složku (obr. 2.29):

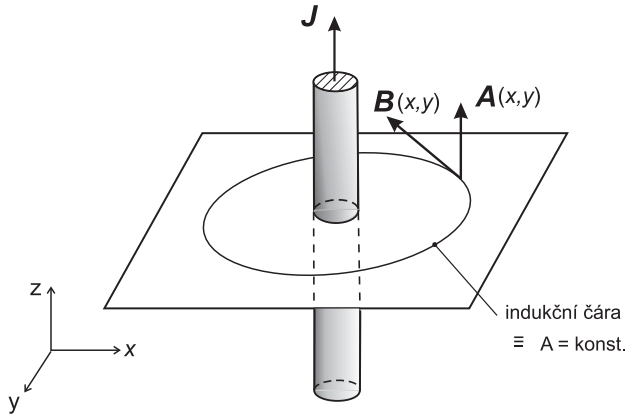
$$\boldsymbol{J}(x,y) = \mathbf{k}\, J_z(x,y)$$

Vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ má, podle rov. (2.49), také pouze z-ovou složku:

$$\boldsymbol{A}(x,y) = \mathbf{k}\, A_z(x,y).$$

a vektorová rovnice (2.49) přechází na *rovnici skalární*:

$$\Delta A_z = -\mu J_z \tag{2.51}$$



Obr. 2.29. Magnetické pole přímého vodiče.

b) Pro větší názornost zapíšeme symbolicky vyjádřenou rov. (2.51) v pravoúhlých souřadnicích (*x,y*):

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z$$

Definiční rov. (2.46) nabývá tvar

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \mathbf{j}\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

čili

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{2.52}$$

c) Ve válcových souřadnicích (*r,z*) pro $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\alpha}_0 J_a(r,z)$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}_0 A_a(r,z)$, nabývá rov. (2.51) tvar

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial z^2} = -\mu J_\alpha \tag{2.53}$$

a z rov. (2.46) dostáváme

$$B_r = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} A_\alpha + \frac{\partial A_\alpha}{\partial r} \tag{2.54}$$

■ *Ekvipotenciály vektorového magnetického potenciálu* $\boldsymbol{A}$ *a jejich vztah k siločarám*.

• Ve 2D magnetickém poli v pravoúhlých souřadnicích (*x, y*) má vektorový magnetický potenciál $\boldsymbol{A}$ tuto významnou vlastnost: *magnetické indukční čáry jsou totožné s ekvipotenciálami vektorového potenciálu, tj. s množinami bodů, v nichž je*

$$A_z = \text{konst.} \tag{2.55}$$

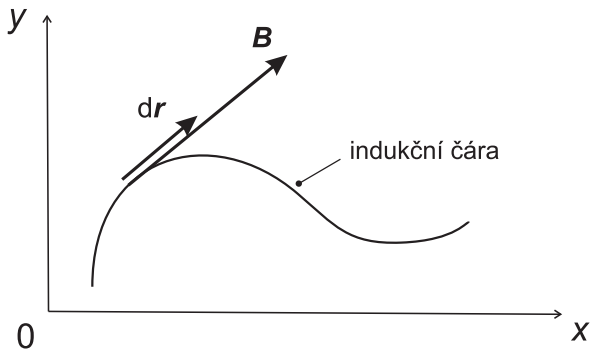
Důkaz. Nejprve dokážeme, že každá indukční čára rovinného magnetického pole v souřadnicích (x,y) je ekvipotenciálou vektorového magnetického potenciálu. Pro indukční čáru platí (obr. 2.30): $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = k\,\boldsymbol{B}$, kde k je reálná konstanta, čili $\mathbf{i}\,\mathrm{d}x + \mathbf{j}\,\mathrm{d}y = k(\mathbf{i}\,B_x + \mathbf{j}\,B_y)$, odkud

$$B_y\,\mathrm{d}x - B_x\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (*)$$

Dosazením za B_x a B_y z rov. (2.52) dostáváme

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}A_z = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = \text{konst.} \qquad (2.57)$$

což je rovnice ekvipotenciály. Důkaz obráceného tvrzení, že každá ekvipotenciála vektorového potenciálu rovinného magnetického pole je indukční čarou tohoto pole, lze provést obrácením uvedeného postupu.



Obr. 2.30. K odvození rovnice magnetické indukční čáry.

Tento poznatek často využíváme při vymezení definiční oblasti a při určování okrajových podmínek. Definiční oblast zavádíme tak, aby byla ohraničena indukční čarou, jejíž průběh dovedeme určit. Pak na této hranici platí Dirichletova okrajová podmínka $A_z = \text{konst.}$

- Pro 2D magnetické pole ve válcových souřadnicích (r,z) platí pro indukční čáry rovnice

  $$r\,A_\alpha = \text{konst.} \qquad (2.55a)$$

  Odvození: lze použít obdobný postup jako v případě pravoúhlých souřadnic (x,y).

- *Vektorový potenciál na rozhraní mezi dvěma magnetiky*. Na rozhraní neplatí MR v diferenciálním tvaru a tedy ani Poissonova, ani Laplaceova rovnice. Podmínky na rozhraní pro stavové vektory $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{B}$ vyjádříme pomocí potenciálu $\boldsymbol{A}$. Na rozhraní mezi dvěma magnetiky o permeabilitách μ_1, μ_2 platí:

  $$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1 \qquad (2.58)$$

  tj. vektorový magnetický potenciál je i na rozhraní spojitý a

  $$\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n} - \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n} = 0 \qquad (2.59)$$

  kde $\dfrac{\partial}{\partial n}$ je derivace ve směru normály k rozhraní, orientované z magnetika 1 do magnetika 2.

  Důkaz plyne z rov. (VIII), (IX), (1.10) a (2.46).

Princip superpozice magnetických polí

V kapitole 2.1.1 jsme vysvětlili princip superpozice elektrických polí. Pro magnetické pole platí analogické tvrzení, při čemž zdroji jsou proudy a odezvami jsou stavové veličiny magnetického pole, resp. skalární nebo vektorový magnetický potenciál. Nechť proudy I_i indukují magnetické pole o intenzitě $\boldsymbol{H}_i$ a o potenciálech φ_{mi} a $\boldsymbol{A}_i$ ($\boldsymbol{i} = 1,\ldots, n$). Pak platí, že působí-li v magneticky lineárním prostředí (μ = konst.) proud

$$I = I_1 + I_2 + \ldots\ldots + I_{\mathrm{n}}$$

indukuje magnetické pole o intenzitě $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 + \ldots\ldots + \boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}$

a o potenciálech $\varphi_{\mathrm{m}} = \varphi_{\mathrm{m1}} + \varphi_{m2} + \ldots\ldots + \varphi_{\mathrm{mn}}$, $\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \ldots\ldots + \boldsymbol{A}_{\mathrm{n}}$

Použití principu superpozice. Při řešení magnetických polí indukovaných větším počtem proudů postupujeme tak, že postupně vyřešíme pole od jednotlivých proudů a výsledky sečteme (superponujeme).

V *nelineárním* magnetiku (tj. v prostředí, kde $\mu \neq$ konst.) princip superpozice neplatí.

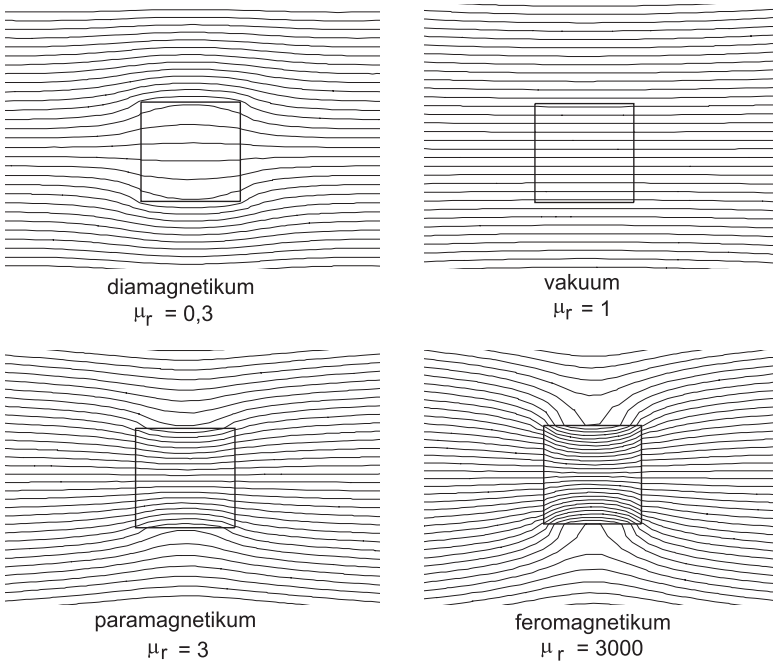
2.4. Makroskopické vlastnosti magnetik

Působí-li na magnetikum vnější magnetické pole o intenzitě $\boldsymbol{H}$, dochází k interakci tohoto pole s magnetikem, což se navenek projeví buďto *zeslabením* nebo *zesílením* magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v magnetiku. U různých látek se tato interakce projeví různou měrou. Jelikož mezi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ platí $\boldsymbol{B} = \mu\,\boldsymbol{H}$, kde permeabilita $\mu = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}}$ (permeabilita vakua je $\mu_0 = 4\,\pi.10^{-7}$ H/m), lze chování látek v magnetickém poli kvantitativně hodnotit podle velikosti jejich relativní permeability μ_{r}. Podle vlastností materiálu magnetika rozlišujeme (obr. 2.31):

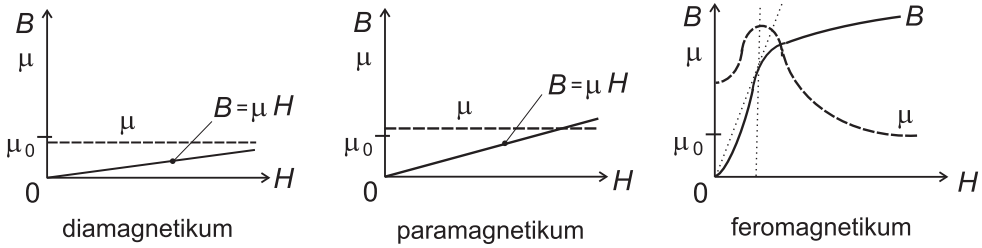
- **Látky diamagnetické (diamagnetika)** – jejich μ_{r} je o málo menší než jednička (viz tabulku 2.3) [2] a tedy v magnetickém poli v nich dochází jen k nepatrnému zeslabení $\boldsymbol{B}$.
- **Látky paramagnetické (paramagnetika)** – jejich μ_{r} je o málo větší než jednička (viz tabulku 2.3) a tedy v magnetickém poli v nich dochází k nepatrnému zesílení $\boldsymbol{B}$.
- **Látky feromagnetické (feromagnetika)** – jejich μ_{r} je je značně vysoké ($\mu_{\mathrm{r}} >> 1$) a tedy v magnetickém poli se v nich $\boldsymbol{B}$ výrazně zvýší.
- **Látky ferimagetické, antiferomagnetické, altermagnetické** – viz str. 92.

Z uvedeného je patrno, že diamagnetika a paramagnetika ovlivňují magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ jen nepatrně. Jsou *magneticky lineární*: jejich závislost $B = B(H)$ je přímka, tedy μ_{r} je konstanta, obr. 2.32. Při technických výpočtech zpravidla nerozlišujeme diamagnetika a paramagnetika – obojí nazýváme *nemagnetickými látkami* a počítáme s jejich relativní permeabilitou $\mu_{\mathrm{r}} \approx 1$. Mnohem zajímavější jsou feromagnetika, o nichž nyní pojednáme podrobněji.

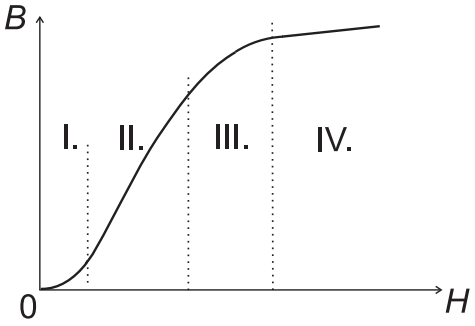
2) Aby se v obr. 2.31 projevilo chování diamagnetika výrazněji, bylo zvoleno $\mu_{\mathrm{r}} = 0{,}3$. Kdyby byl kvádr z „ideálního diamagnetika“, tj. jeho relativní permeabilita by byla $\mu_{\mathrm{r}} = 0$, vnější magnetické pole by do kvádru nevstupovalo, uvnitř kvádru by bylo $\boldsymbol{B} = 0$ a kvádr by se choval jako *magnetická izolace*. Ideální diamagnetika v přírodě neexistují, ale chovají se tak (za jistých podmínek) supravodiče (viz kapitolu 12.5, příklad 12.21).



Obr. 2.31. Rozložení indukčních čar po vložení kvádru do homogenního magnetického pole. Kvádr je z materiálů o různých relativních permeabilitách μ_r.



Obr. 2.32. Magnetizační charakteristiky a průběh permeability.



Obr. 2.33. Magnetizační křivka (křivka prvotní magnetizace).

Tabulka 2.3. Relativní permeabilita některých „nemagnetických" látek

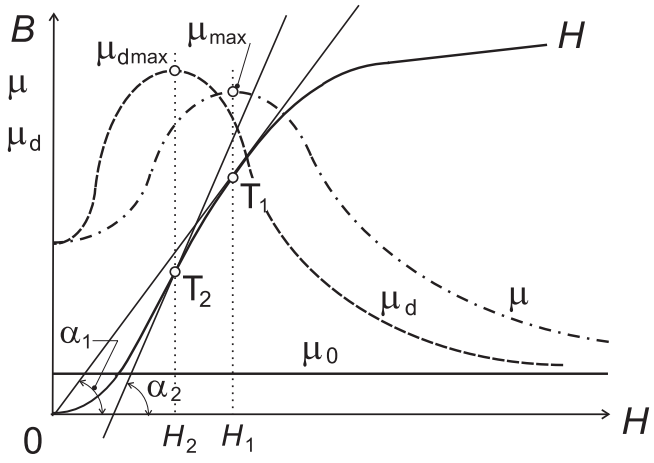
Diamagnetika	μ_r	Paramagnetika	μ_r
vizmut	0,999 82	mangan	1,001 00
uhlík	0,999 90	chrom	1,000 33
olovo	0,999 98	hliník	1,000 02
měď	0,999 99	vzduch	1,000 00
voda	0,999 99	platina	1,000 25

Magnetické vlastnosti a charakteristiky feromagnetika

Feromagnetické látky představují svými vlastnostmi v přírodě jistou anomálii: vnějším magnetickým polem o poměrně slabé intenzitě ***H*** umožňují dosáhnout vysokou magnetickou indukci ***B*.** Tím se stávají nepostradatelným materiálem pro konstrukci mnoha různých elektrotechnických zařízení, např. elektrických strojů, elektromagnetů, apod.

Magnetické vlastnosti feromagnetik se zjišťují měřením. Mezi charakteristické vlastnosti feromagnetik patří zejména:

- Feromagnetika jsou magneticky nelineární: jejich permeabilita μ není konstantní, je funkcí magnetické intenzity H, $\mu = \mu(H)$, obr. 2.33.
- Feromagnetika si zachovávají vysokou hodnotu magnetické indukce i při odstranění vnějšího magnetického pole (permanentní magnety).
- Magnetická indukce ***B*** nezávisí jen na ***H***, ale též na předchozím stavu feromagnetika. Tento jev nazýváme *magnetickou hysterézí*.
- Se zvyšující se teplotou feromagnetikum postupně ztrácí své charakteristické vlastnosti a při tzv. *Curieově teplotě* přechází do stavu paramagnetického. Například u železa je Curieova teplota 769 °C, u kobaltu 1120 °C, u niklu 360 °C atd. Klesne-li teplota pod Curieovu teplotu, obnoví se jejich feromagnetické vlastnosti.
- **Magnetizační křivka** (též *křivka prvotní magnetizace*) je závislost $B = B(H)$. Působí-li na odmagnetované feromagnetikum magnetické pole, jehož intenzita je monotónně zvyšována od $H = 0$, pohybuje se pracovní bod (H,B) po magnetizační křivce. Magnetizační křivka má čtyři oblasti (obr. 2.33): oblast I (u některých feromagnetik je prakticky potlačena), oblast II je prakticky lineární, oblast III je tzv. „koleno" magnetizační křivky a v oblasti IV, která přísluší nasycenému stavu, se feromagnetikum chová jako paramagnetikum, tj. jeho relativní permitivita klesá na $\mu_r \approx 1$. Oblasti II a IV se často aproximují přímkou.



Obr. 2.34. Průběh permeability μ a diferenciální permeability μ_d.

■ Permeabilita

– *Křivku permeability* $\mu = \mu(H)$, obr. 2.34, získáme z magnetizační křivky pomocí vztahu

$$\mu = \frac{B}{H} \tag{2.60}$$

Se zvyšující se H permeabilita zprvu vzrůstá, při intenzitě H_1, která je souřadnicí tečného bodu T_1 přímky vedené z počátku 0 k magnetizační křivce dosahuje svého maxima a poté klesá, přičemž se asymptoticky blíží k hodnotě $\lim_{H\to\infty} \mu = \mu_0$.

– *Diferenciální permeabilita*. Je definována vztahem

$$\mu_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H}. \tag{2.61}$$

Závislost $\mu_\mathrm{d} = \mu_\mathrm{d}(H)$ zprvu stoupá, nabývá svého maxima pro intenzitu H_2, jež je souřadnicí inflexního bodu T_2 magnetizační křivky a poté se asymptoticky blíží k hodnotě μ_0.

– *Počáteční permeabilita*, resp. *počáteční diferenciální permeabilita*

$$\mu_\mathrm{p} = \lim_{H\to 0} \frac{B}{H}, \quad \text{resp. } \mu_\mathrm{dp} = \lim_{H\to 0} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H} \tag{2.62}$$

uplatňuje se ve velmi slabých magnetických polích ($H \approx 0$).

– *Maximální permeabilita* je permeabilita v tečném bodu T_1 magnetizační křivky (obr. 2.34):

$\mu_\mathrm{max} = K_1 \operatorname{tg} \alpha_1$, kde K_1 je konstanta (2.63)

– *Maximální diferenciální permeabilita* je permeabilita v inflexním bodu T_2 magnetizační křivky (obr. 2.34), v němž směrnice tečny k magnetizační křivce má svou maximální hodnotu:

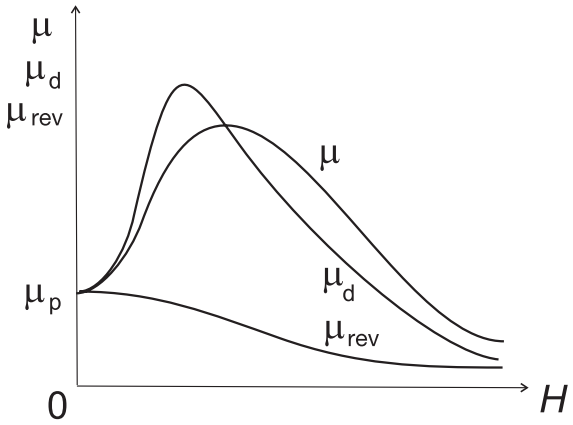
$\mu_\mathrm{d\,max} = K_2 \operatorname{tg} \alpha_2$, kde K_2 je konstanta (2.64)

– *Vztah mezi permeabilitami* μ a μ_d .Permeability μ a μ_d jsou vázány vztahem

$$\mu_d = \frac{d(\mu H)}{dH} = \mu + H\frac{d\mu}{dH} \tag{2.65}$$

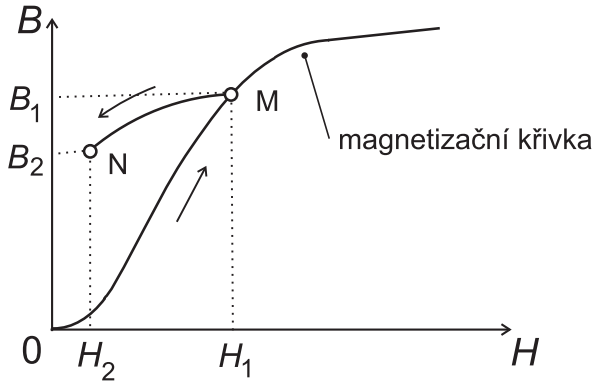
– *Reverzibilní (vratná) permeabilita* μ_{rev} – viz dále.

– *Porovnání křivek permeabilit* μ, μ_d, μ_{rev} je na obr. 2.35.

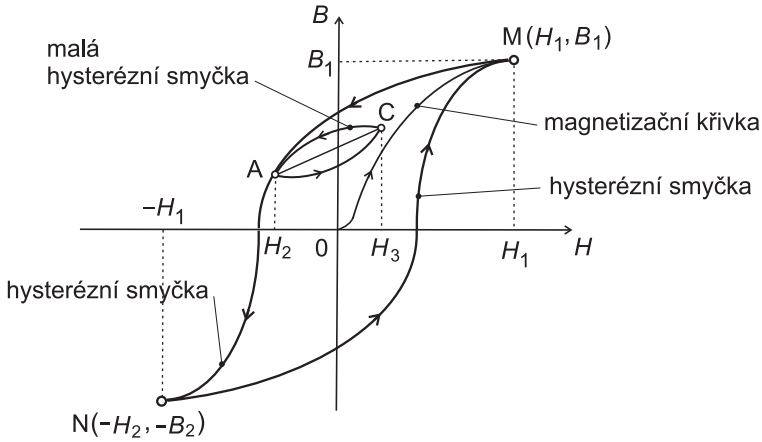


Obr. 2.35. Průběhy permeabilit μ, μ_d, μ_{rev}.

■ **Hysterézní smyčka.** Odmagnetované feromagnetikum vložíme do magnetického pole a magnetickou intenzitu H monotónně zvyšujeme od $H = 0$. Ve feromagnetiku vzniká magnetická indukce B, přičemž pracovní bod (H, B) se pohybuje po magnetizační křivce (obr. 2.36). V pracovním bodu M(H_1, B_1) magnetizační křivky monotónně snižujeme magnetickou intenzitu, z hodnoty H_1 na hodnotu H_2. Pracovní bod se nebude pohybovat po magnetizační křivce, ale po jiné křivce, která končí v bodu N(H_2, B_2). Uplatní se jev, který se nazývá *hysteréze*. Jestliže nadále monotónně snižujeme H k nule a poté až hodnotě $-H_1$, dále pak k $H = 0$ a opět k $H = H_1$, bude se pracovní bod (H,B) pohybovat po tzv. *hysterézní smyčce* (obr. 2.37). Závěr: intenzitou H není magnetický stav feromagnetika jednoznačně určen, záleží na tom, *z jakého stavu* se dospělo *k určité intenzitě*.

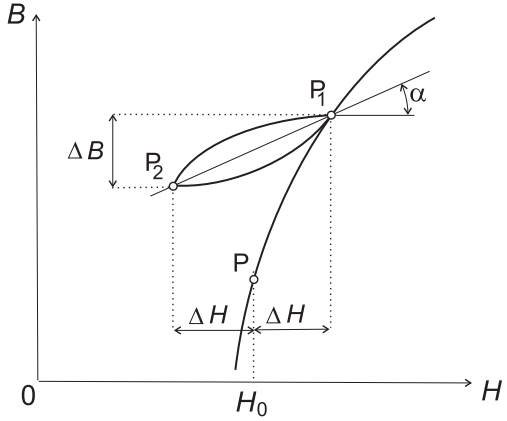


Obr. 2.36. K vysvětlení hystereze.



Obr. 2.37. Hysterézní smyčka a malá hysterézní smyčka.

■ **Malá hysterézní smyčka**. Jestliže v pracovním bodu A hysterézní smyčky zvyšujeme H z hodnoty H_2 na H_3 a pak se vrátíme na hodnotu H_2, nebude se pracovní bod (H, B) pohybovat po hysterézní smyčce, ale po tzv. *malé hysterézní smyčce*, ležící mezi body A a C (obr. 2.37, obr. 2.38). Závěr: *pohyb pracovního bodu po hysterézní smyčce* (stejně jako jeho pohyb po magnetizační křivce) *je nevratný*, zatímco jeho pohyb po malé hysterézní smyčce je *vratný*. Malou hysterézní smyčku často nahrazujeme úsečkou A–C.



Obr. 2.38. K reverzibilní permeabilitě.

– <u>*Reverzibilní (vratná) permeabilita*</u> se uplatňuje tam, kde magnetická intenzita H má konstantní složku H_0 (stejnosměrná předmagnetizace) a na ní se superponují malé oscilace $\pm\Delta H$ ($\Delta H \ll H_0$). Pracovní bod P se pak pohybuje po malé hysterézní smyčce $P_1 - P_2$ (obr. 2.38). Reverzibilní permeabilita je směrnicí přímky P_1–P_2:

$$\mu_{\mathrm{rev}} = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{\Delta B}{2\,\Delta H} \tag{2.66}$$

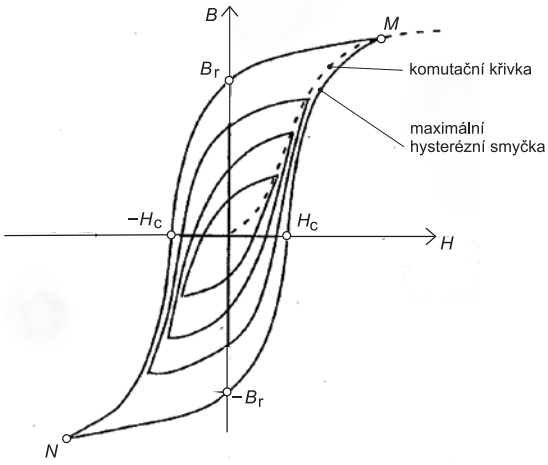
■ **Soustava hysterézních smyček**. Při cyklickém přemagnetování se pracovní bod pohybuje po hysterézní smyčce. Provádíme-li přemagnetování pro různé hodnoty vrcholových bodů M a N, dostaneme *soustavu hysterézních smyček*. Hysterézní smyčka,

jejíž pracovní body M a N přísluší nasycenému feromagnetiku (tj. stavu, kdy $\mu_r = 1$), obepíná všechny ostatní hysterézní smyčky této soustavy a nazývá se *maximální hysterézní smyčkou* (obr. 2.39). V soustavě hysterézních smyček leží jejich vrcholy na tzv. *komutační křivce*, která je téměř totožná s magnetizační křivkou.

Maximální hysterézní smyčka má tyto důležité údaje:

– Magnetickou indukci B_r, kterou si podrží polarizované feromagnetikum při poklesu magnetické intenzity na hodnotu $H = 0$. Magnetická indukce B_r se nazývá se *remanentní indukce* (též krátce *remanence*, *zbytková indukce*).

– Magnetickou intenzitu H_c, jíž musí působit magnetické pole na feromagnetikum, aby jej odmagnetovalo, tj. aby $B = 0$. Magnetická intenzita H_c se nazývá se *koercivita*.



Obr. 2.39. Soustava hysterézních smyček.

Magneticky měkká a tvrdá feromagnetika

Tvar hysterézní smyčky závisí na chemickém složení feromagnettika a na jeho tepelném a mechanickém zpracování. Rozlišujeme[3] magneticky měkká a magneticky tvrdá feromagnetika (obr. 2.40).

■ **Magneticky měkká feromagnetika** se vyznačují strmou magnetizační křivkou a úzkou hysterézní smyčku, ohraničující plochu malého obsahu; mají tedy vysokou počáteční i maximální permeabilitu a malou koercivitu $H_c < 10^3$ A/m. Často se u nich zanedbává hystereze a uvažuje se jen magnetizační křivka. Z magneticky měkkých feromagnetik se zhotovují střídavé magnetické obvody (viz kapitolu 9.7).

Z hlediska chemického složení a výrobní technologie je dělíme takto:

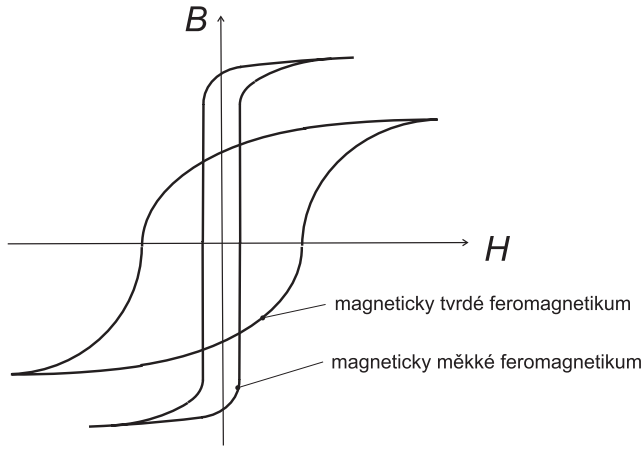
– *Technicky čisté železo* (např. železo armco) a nízkouhlíkové ocele (obsahují cca 0,04 % C). Použití: stejnosměrné elektromagnety, pólové nástavce stejnosměrných strojů apod.

3) Tyto názvy pocházejí z analogie s mechanickou tvrdostí: klasické magneticky měkké materiály (např. elektrolytické železo) jsou i mechanicky měkké a klasické magneticky tvrdé materiály (např. wolframová ocel) jsou tvrdé i mechanicky.

– *Křemíkové ocele* (obsahují 0,8 až 4,5 % Si), mají poměrně nízkou konduktivitu (tedy nízké ztráty vířivými proudy, viz kapitolu 12.3). Použití: transformátorové a dynamové plechy.

– *Vysokopermeabilní slitiny* (např. *permalloy, perminvar, alsifer* a některé *ferity*), jsou nejkvalitnější magneticky měkké materiály. Použití: vf transformátory, stínící kryty.

– *Speciální materiály*, např. magnetostrikční materiály, termomagnetické slitiny, materiály pro magnetické paměti.



Obr. 2.40. Hysterézní smyčka magneticky měkkého a tvrdého feromagnetika.

■ **Magneticky tvrdá feromagnetika** mají magnetizační křivku s malou strmostí a širokou hysterézní smyčku, ohraničující plochu velkého obsahu; mají tedy poměrně nízkou permeabilitu a velkou koercivitu, $H_c > 2{,}5.10^3$ A/m, obr. 2.40. Magneticky tvrdé materiály se používají pro permanentní magnety. Bylo vyvinuto velké množství magnetických materiálů, které se liší nejen svými magnetickými vlastnostmi, ale též konduktivitou, mechanickými vlastnostmi a ekonomickými parametry (zejm. cenou, dostupností výchozích surovin, výrobními náklady, opracovatelností apod.). Dělíme je na:

– *Uhlíkové ocele* s obsahem cca 1,5 % uhlíku, zdokonalením byly ocele legované wolframem, chromem a kobaltem, zakalené na martenzitickou strukturu. Později byly sestaveny mnohem výhodnější slitiny železa, niklu a hliníku (*alni*), případně kobaltu (*alnico*), mědi či titanu. Nevýhodou slitin typy alni a alnico jsou značná mechanická tvrdost, křehkost a tím obtížná opracovatelnost.

– *Tvrdé ferity*, například báriové ($BaFe_{12}O_{19}$) nebo stronciové ($SrFe_{12}0_{19}$), s obsahem cca 80 % oxidu železa a asi 20 % oxidu baria BaO nebo stroncia SrO. Tyto materiály jsou poměrně laciné a spolehlivé, mohou být izotropní nebo anizotropní. Použití: v automatizační, řídící a měřící technice.

– *Magnety ze vzácných zemin* a to na bázi samarium-kobalt ($SmCo_5$ a Sm_2Co_{17}) nebo na bázi neodym-železo-bór ($Nd_2Fe_{14}B$). Vyrábí se procesy práškové metalurgie: lisováním v magnetickém poli s následným spékáním. V současnosti patří k nejvýkonnějším permanentním magnetům. Používají se v silnoproudé, počítačové a řídící technice a u elektroakustických zařízení.

– *Plastové magnety*: v nemagnetické plastové matrici je plnidlem jemný prášek z vhodných slitin (např. alni, alnico, nebo tvrdé ferity či materiály na bázi vzácných zemin). Mohou být izotropní nebo anizotropní. Jsou lisovány do požadovaných tvarů a slinovány při vysoké teplotě. Výhodné je, že je lze vyrobit v libovolném tvaru. Použití: ve slaboproudé technice.

Tabulka 2.4. Charakteristické hodnoty některých magneticky měkkých a tvrdých feromagnetik.

Magneticky měkké materiály			
Materiál	koercivita H_c [A/m]	remanence B_r [T]	max. relat. permeab. $\mu_{r\,max}$
Rhometal Ni+Gr+Si	0,30	0,35	5.10^3
Monimax Ni+Mo	0,08	0,90	$3{,}5.10^4$
Alumetal Ni+Cu+Cr	0,03	0,50	8.10^4

Magneticky tvrdé materiály			
Materiál	koercivita H_c [A/m]	remanence B_r [T]	měrná energie [kJ/m^3]
AlNiCo 130	48,0	0,57	5,20
AlNiCo 300	59,0	0,84	8,90
AlNiCo 400	48,0	1,05	15,10

2.5. Magnetická polarizace

Interakci mezi elektrickým polem a dielektrikem jsme označili jako *elektrickou polarizaci* dielektrika. Obdobně je tomu u magnetického pole: vložíme-li do magnetického pole magnetikum, dochází mezi polem a látkou k interakci, kterou nazýváme *magnetickou polarizací* magnetika. Při působení magnetické intenzity $\boldsymbol{H}$ na diamagnetika, vektor $\boldsymbol{B}$ se nepatrně zeslabení, u paramagnetik se nepatrně zesílí a u feromagnetik se $\boldsymbol{B}$ výrazně zesílí.

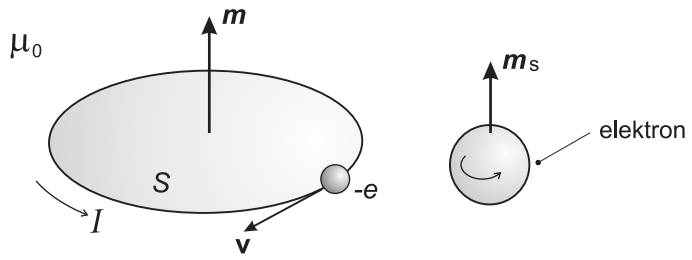
2.5.1. Mikrostruktura procesu magnetické polarizace

Ačkoliv Maxwellova teorie elektromagnetického pole je teorií *makroskopickou*, alespoň stručně nastíníme procesy, které probíhají v mikrostruktuře magnetika, jestliže na ně působí vnější magnetické pole. Elektron obíhající rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolem atomového jádra lze považovat za elektrický proud I, který indukuje ve svém okolí magnetické pole. Tento model nazveme *elementárním magnetickým dipólem* a budeme jej charakterizovat *orbitálním magnetickým momentem* (obr. 2.41).

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}\ \ [\mathrm{Am}^2] \tag{2.67}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ ($\mathrm{d}S$ je obsah rovinné plochy ohraničené dráhou kruhového proudu I a $\mathbf{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy $\mathrm{d}S$, orientovaný pravotočivě vůči směru proudu I). Jestliže kolem jádra obíhá více elektronů, je výsledný magnetický moment atomu vektorovým součtem orbitálních magnetických momentů jednotlivých elektronů. Elektron se

kromě orbitálního pohybu ještě otáčí kolem své osy a tento tzv. *spin elektronu* generuje další magnetické pole, což lze charakterizovat *spinovým magnetickým momentem*. Orbitální i spinový magnetický moment atomu se vektorově sčítají, stejně jako jejich magnetická pole. V prostoru jsou náhodně rozloženy, takže se makroskopicky neprojevují.



Obr. 2.41. Orbitální a spinový magnetický moment elementárního magnetického dipólu.

Materiály, které používáme v elektrotechnice, se vzájemně liší uspořádáním a orientací svých atomových momentů. Sledujme fyzikální procesy v jejich mikrostruktuře při magnetické polarizaci, tj. při působení vnějšího magnetického pole (viz kapitolu 4.4, str. 82).

Diamagnetika. (např. Cu, Au, H_2O). Obíhající elektrony vytvářejí navzájem neuspořádané, náhodně orientované proudové smyčky. Jejich magnetické pole se vyruší. Vnější magnetické pole, vlivem Lorentzovy síly, nepatrně změní rychlost obíhajících elektronů a to tak, že vytváří magnetické pole, které směřuje vždy proti poli vnějšímu (Lenzovo pravidlo) a zeslabuje jej, látka je z pole vypuzována. Spin elektronů se při tom neuplatňuje. Relativní permeabilita diamagnetika je $\mu_r < 1$, ale jen nepatrně. Například pro měď je $\mu_r \approx 0{,}999994$. Po zrušení vnějšího pole tento jev okamžitě zmizí; diamagnetika nemají remanenci (paměť).

Dokonalým diamagnetikem je supravodič. Veškeré vnější magnetické pole je ze supravodiče vytlačeno: $\mu_r \approx 0$, uvnitř supravodiče je $B = 0$ (viz příklad 12.21 na str. 426).

Paramagnetika. (např. Al, O_2, Pt). Zatímco diamagnetizmus je orbitální reakcí na vnější magnetické pole, u paramagnetizmu jde o spinovou reakci. Mikrostrukturu paramagnetika lze přirovnat k malým, náhodně natočeným magnetkám. Jejich magnetická pole se navzájem vyruší a látka nemá magnetizaci. Při působení vnějšího magnetického pole magnetky mají tendenci se natočit do směru pole. Materiál pak bude slabě magnetizován a přitahován do směru vnějšího pole. Relativní permeabilita paramagnetika je $\mu_r > 1$, ale jen nepatrně. Například pro hliník je $\mu_r \approx 1{,}000022$. Při vypnutí vnějšího pole se magnetky ihned vrátí do náhodné polohy, paramagnetika nemají remanenci (paměť).

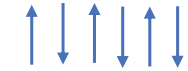
Feromagnetika. Na rozdíl od diamagnetik a paramagnetik jsou jejich sousední atomy seskupeny do tzv. *oblastí spontánní magnetizace* (též *Weissovy domény*). Každá z těchto oblastí je jakýmsi „silným elementárním magnetem“. Nepůsobí-li vnější magnetické pole, je orientace jednotlivých domén neuspořádaná, celkový makroskopický magnetický moment látky je nulový. Při postupném zvyšování vnějšího magnetického pole se natáčí momenty domén ve směru tohoto pole, až v nasyceném stavu jsou uspořádány paralelně. Proces magnetizace neprobíhá spojitě. Domény mění svojí orientaci i tvar skokově a nelineárně (magnetizace látky neroste úměrně s intenzitou vnějšího pole), uplatňuje se hystereze a remanence.

Ferimagnetika se při magnetizaci chovají jako feromagnetika, ale jejich magnetické momenty jsou různě velké. V saturovaném stavu jsou uspořádány paralelně a jsou střídavě orientovány. Částečně se kompenzují a jejich makroskopická magnetizace je proto slabší než u feromagnetik.

Antiferomagnetika. Jejich magnetické momenty jsou v saturovaném stavu uspořádány též paralelně, jsou střídavě opačně orientovány a na rozdíl od feromagnetik mají stejnou velikost. Jejich magnetismus se vyruší a materiál se makroskopicky chová jako paramagnetikum.

Altermagnetika, jsou jsou v současné době předmětem výzkumu (viz [105] až [107]). Očekávají se aplikace, svým významem revoluční. Elementární magnetické momenty altermagnetik jsou uspořádány tak, že látka nemá makroskopický moment. Jejich spiny jsou však orientované v různých krystalografických směrech, což způsobuje, že látka vykazuje magnetické vlastnosti závislé na směru proudu nebo na krystalografickém směru, i když se navenek chová jako nemagnetická.

Tabulka 2.5. Materiály s význačnými magnetickými vlastnostmi.

typ materiálu	symbolické uspořádání magnetických momentů	makroskopická magnetizace, permeabilita	příklad
feromagnetika		silná $\mu_r >> \mu_O$	Fe, Ni, Co
ferimagnetika		slabá $\mu > \mu_O$	magnetit Fe_3O_4, ferity
antiferomagnetika		$\mu \approx \mu_O$	MnO, FeO, NiO, FeCl
altermagnetika		$\mu \approx \mu_O$	MnO, NiO, MnTe, RuO_2

Magnetické vlastnosti uvedených typů materiálů závisí na teplotě. Při určité kritické teplotě se uspořádání atomových momentů rozpadne a materiál se stane paramagnetický. U feromagnetik a antiferomagnetik hovoříme o Curieově teplotě (např. pro železo 770 °C), u feromagnetik a altermagnetik o Néelově teplotě. Altermagnety se používají nejen při pokojové teplotě, ale i při nízkých teplotách (tzv. kvantové technologie).

2.5.2. Vektor magnetické polarizace (magnetizace)

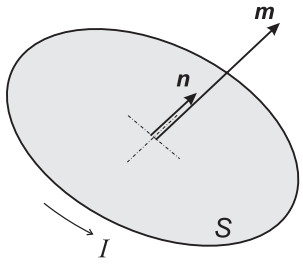
Fyzikální podstata magnetické polarizace je zcela odlišná od elektrické polarizace, avšak matematický popis obou makroskopických polarizací je formálně obdobný.

Předpokládejme, že magnetikum je složeno z velkého počtu elementárních magnetických dipólů; každý dipól je tvořen proudovou smyčkou podle obr. 2.42. Dipól charakterizujeme magnetickým momentem, rov. (2.67). Obdobně jako při elektrické polarizaci, v magnetiku zavedeme objemovou hustotu momentů dipólů a nazveme ji *vektorem magnetické polarizace*

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}V} \qquad [\mathrm{A/m}] \tag{2.68}$$

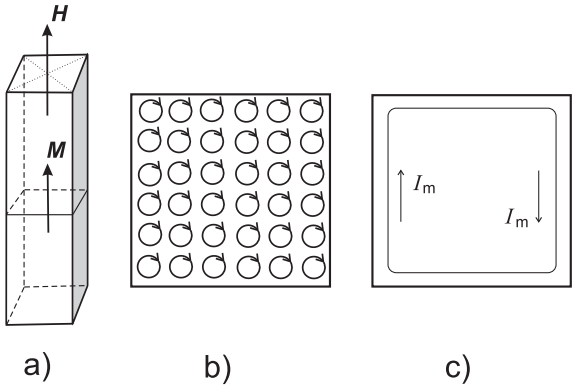
Speciálně: pro magnetikum o objemu V, v homogenním magnetickém poli, je vektor magnetické polarizace

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{m}}{V}$$



Obr. 2.42. Elementární magnetický dipól.

Magneticky polarizované magnetikum nahrazujeme modelem složeným z elementárních magnetických dipólů. Na obr. 2.43a je magnetikum ve vnějším magnetickém poli. Dochází k orientaci jeho atomových dipólů (obr. 2.43b). Je patrno, že uvnitř magneticky polarizovaného tělesa se proudy zruší a uplatní se jen proud I_m na povrchu tělesa (obr. 2.43c). Nazveme jej (v analogii s elektrickou polarizací) *vázaným* (*magnetizačním*) *proudem*, na rozdíl od *volných proudů*, které indukují vnější magnetické pole. Magneticky polarizované těleso je svým magnetickým působením ekvivalentní tenké cívce, jíž prochází vázaný proud I_m. Tento model magnetické polarizace pochází od A. M. Ampèra, který pro „elementární magnetické dipóly“ použil označení „elementární proudy“.



Obr. 2.43. Model magneticky polarizovaného magnetika.

Intenzitu magnetického pole $\boldsymbol{H}$ uvnitř magnetovaného tělesa lze alternativně definovat [kromě definice $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, podle rov. (1.10)] pomocí magnetické intenzity ve vakuu a vektoru magnetické polarizace

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{2.69}$$

Porovnáním obou definic dostáváme vektor magnetické polarizace

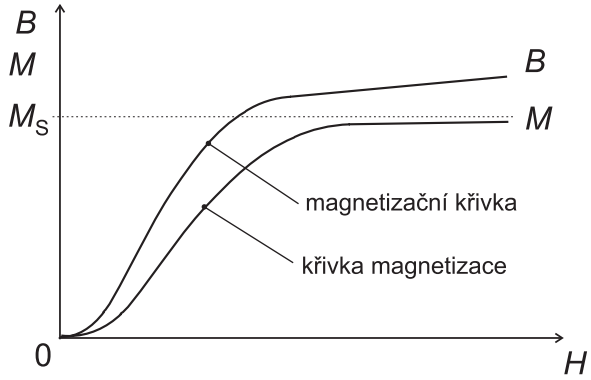
$$\boldsymbol{M} = \kappa_m \boldsymbol{H}, \tag{2.70}$$

kde veličina

$$\kappa_m = \mu_r - 1 \quad [-], \quad \kappa_m \geq 0 \tag{2.71}$$

se nazývá *magnetická susceptibilita*. Je materiálovou charakteristikou a alternativní veličinou k permeabilitě μ.

Polarizace ve feromagnetiku: vzhledem k průběhu závislosti $\mu = \mu(H)$ je zřejmé, charakter funkce $M = M(H)$ je obdobný jako u magnetizační křivky. Zvětšujeme-li H, hodnota M se asymptoticky blíží jisté konstantní hodnotě M_s, k tzv. *magnetizaci nasycení* (obr. 2.44).



Obr. 2.44. Magnetizační křivka B = B(H) a křivka magnetizace M = M(H) feromagnetika.

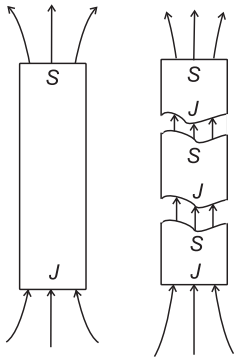
Ve vakuu ($\mu_r = 1, \kappa_m = 0$) k magnetické polarizaci nedochází, $\boldsymbol{M} = 0$, a rov. (2.69) přechází na známý vztah

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \tag{2.72}$$

Poznámky:

- Zdrojem intenzity magnetického pole $\boldsymbol{H}$ je pouze vnější magnetické pole (tedy pouze volné proudy). Vektor $\boldsymbol{H}$ tedy nezávisí na prostředí, tedy na μ_r. Naproti tomu zdrojem vektoru $\boldsymbol{B}$ jsou nejen volné proudy, ale též vázané (magnetizační) proudy.
- Různá znaménka při vektorech $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{M}$ v rovnicích (2.20) a (2.69) vyjadřují, že elektrickou polarizací se vektor $\boldsymbol{E}$ zmenšuje, kdežto při magnetické polarizaci se vektor $\boldsymbol{B}$ zvětšuje.
- Permanentní magnet lze modelovat vázaným proudem protékajícím povrchem magnetika. Vázaný proud přetrvává i po rozdělení magnetika na několik částí (obr. 2.45).
- Analogickým postupem jako u elektrostatické polarizace nalézáme, že hustotu vázaných proudů lze vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{J}_v = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{M} \tag{2.73}$$



Obr. 2.45. K vlastnosti permanentního magnetu.

2.6. Závěrečná poznámka

V této kapitole jsme poznali, že matematický model elektromagnetického pole může být vyjádřen nejen pomocí stavových vektorů $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{J}$, ale též pomocí potenciálů. Na tuto účinnou strategii při řešení elektromagnetických polí upozornil anglický fyzik *Georgie Green*, který v r. 1828 položil základy *teorie potenciálu*. Ve 40. letech 19. stol. vybudoval matematickou teorii potenciálu *Karel Fridrich Gauss*, nezávisle na Greenovi. Tuto teorii prohloubili W. Thomson, S. D. Poisson a F. E. Neumann, který mj. zavedl vektorový magnetický potenciál. V dalších kapitolách poznáme, že výhodou (alternativního) matematického modelu elektromagnetického pole, vyjádřeného pomocí potenciálů, je jeho poměrně snadná řešitelnost, analytickými nebo numerickými metodami.

Položme otázku: lze zavést ještě „jiné potenciály", popřípadě jiné veličiny a pomocí nich pak formulovat matematický model elektromagnetického pole, který by byl výhodný pro řešení pole? Soudobá teorie uvádí několik způsobů zavedení těchto veličin. O jednom z nich pojednáme v kapitole 13.3.

Obsahem následujících tří kapitol budou základní metody analýzy časově neproměnného elektrického a magnetického pole. Budeme sledovat řešení těchto úloh:

- *Elektrostatické pole.* Známe tvar elektrod umístěných v dielektriku a napětí mezi nimi, resp. rozložení nábojů na nich. Vyšetříme elektrostatické pole (tj. veličiny φ, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$) v obecném bodu v okolí elektrod.
- *Proudové pole.* Známe tvar elektrod umístěných ve vodivém prostředí a proud, který jimi protéká. Vyšetříme proudové pole (tj. veličiny φ, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$) v obecném bodu v okolí elektrod.
- *Magnetické pole.* Známe tvar vodičů (resp. cívek) a proudy, které jimi protékají. Vyšetříme magnetické pole (tj. veličiny φ_m, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$) v obecném bodu v okolí vodičů (cívek).

Přitom budeme uvažovat nejjednodušší typ prostředí: izotropní, homogenní a lineární.

2.7. Příklady

Příklad 2.11.

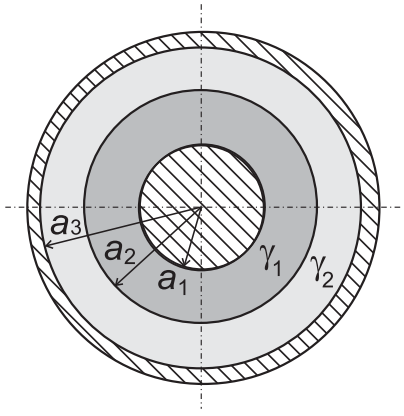
Může být vektorové pole $\boldsymbol{E} = \mathbf{i}\, 6xy + \mathbf{j}\, 3(x^2 + y^2)$ elektrostatickým polem? Jestliže ano, určete elektrický potenciál.

Výsledek:

Ano, neboť rot $\boldsymbol{E} = 0$; $\varphi = -y^3 - 3x^2y$.

Příklad 2.12.

Koaxiální kabel délky l má nedokonalé dielektrikum složené ze dvou vrstev o konduktivitách γ_1 a γ_2, obr. 2.46. Určete odpor mezi žílou a pláštěm.



Obr. 2.46. Koaxiální kabel.

Výsledek:

$$R = \frac{1}{2\pi l}\left[\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{a_3}{a_2}\right]$$

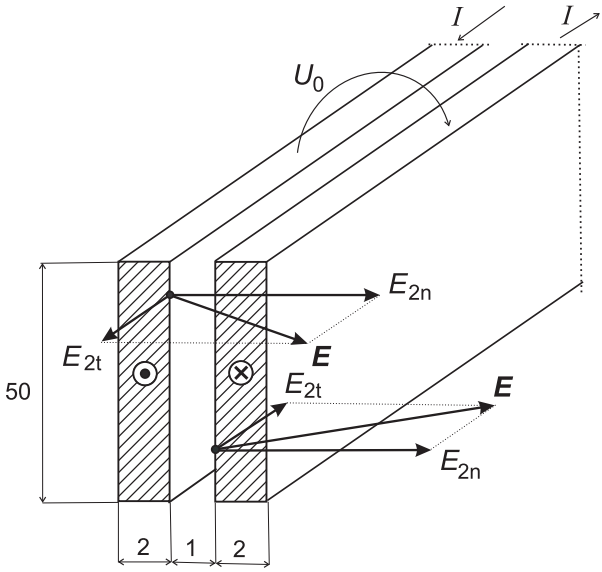
Příklad 2.13.

Zdroj napětí U_0 = 100 V napájí spotřebič R = 100 W pasovým měděným vedením ($\gamma = 5{,}8.10^7$ S/m), obr. 2.47. Určete E_n a E_t na přilehlých částech povrchu pasů. (Odpor vedení je vůči odporu spotřebiče zanedbatelný.)

Řešení:

Proudová hustota v průřezu vedení je

$$J = \frac{I}{S} = \frac{U/R}{S} = \frac{100/100}{5.0{,}2} = 1\,\mathrm{A/cm^2}$$



Obr. 2.47. Dvouvodičové vedení.

Tečná složka vektoru $\boldsymbol{E}$ je (na rozdíl od elektrostatiky) nenulová:

$$E_{1t} = E_{2t} = \frac{J}{\gamma} = 1{,}72.10^{-6}\ \mathrm{V/cm}, \qquad E_{2n} = \frac{U}{d} = 10^{3}\ \mathrm{V/cm}$$

Na rozdíl od elektrostatiky je $E_{1t} = E_{2t} \neq 0$. Ostrá nerovnost $E_n >> E_t$ je pro jakékoliv vedení typická: *elektrické pole na povrchu proudovodičů je téměř stejné jako v elektrostatice*.

Příklad 2.14.

Hallův jev. Kovový proužek šířky d a tloušťky b je v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, obr. 2.48. Do proužku je zaveden proud I. Na obrázku je vyznačen volný elektron s nábojem $-e$, pohybující se driftovou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Tento elektron je součástí proudu I a magnetické pole B na něho působí magnetickou silou F_m, která jej vychyluje; jeho trajektorie je vyznačena čárkovaně. Tím se na jedné hraně proužku hromadí volné elektrony a vzniká tam záporný náboj a na protilehlé hraně vzniká náboj kladný. Mezi oběma náboji je intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ (a tedy napětí U_{AB} – tzv. *Hallovo napětí*), která působí na elektron elektrickou silou F_e. E. H. Hall zjistil (v r. 1879), že mezi veličinami U_{AB}, B, I a d platí rovnice [4)]

$$U_{AB} = k\frac{B\,I}{d} \tag{2.74}$$

kde k je tzv. *Hallova konstanta*. Její velikost závisí na materiálu proužku;
pro měď je $k_{Cu} = -5{,}3.10^{-11}$ [m³/C],
pro stříbro $k_{Ag} = -8{,}9.10^{-11}$ [m³/C],
pro vizmut $k_{Bi} = -1.10^{-6}$ [m³/C] atd.

4) Hallův jev lze zjistit jen u vodičů s elektronovou vodivostí.

Vážení čtenáři, právě jste dočetli ukázku z knihy ***Aplikovaný elektromagnetizmus*.**
Pokud se Vám ukázka líbila, na našem webu si můžete zakoupit celou knihu.